Révisions d'algèbre linéaire

PRÉPARATION 1

♣ **Exercice 1 —** Résoudre, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$, le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

Indication — Du pivot, rien que du pivot !

Correction — On distingue deux cas :

- si $m \neq -1$, $\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{m+1}{2}, 0, \frac{m-1}{2}\right)\right\}$;
- si $m = -1$, $\mathscr{S} = \{(y, y, -1) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

♣ **Exercice 2 —** Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction — $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (binôme)

♣ **Exercice 3 —** Soient $A = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$, où a, b, c sont trois réels vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, et $B = A - I_3$.

1. Déterminer $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$.
   Vérifier qu'ils sont supplémentaires.
2. Calculer A^2, B^2, AB et BA.
3. Déterminer l'inverse de $\lambda A + \mu B$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ lorsque la matrice est inversible.

Indication — 3. $\mathrm{Vect}(A, B)$ est stable par multiplication.

Correction —

1. $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{Vect}((a, b, c))$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}((-b, a, 0), (-c, a, 0))$.
2. $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA = 0$.
3. $(\lambda A + \mu B)(\lambda' A + \mu' B) = \lambda\lambda' A + \mu\mu' B$. On peut prendre $\lambda' = 1/\lambda$ et $\mu' = 1/\mu$ si $\lambda\mu \neq 0$. Dans le cas contraire, la matrice n'est pas inversible.

♣ **Exercice 4 —** Déterminer l'ensemble des matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(M) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Tr}(AM) = 0$$

Indication — Considérer un produit scalaire ou raisonner à l'aide de formes linéaires.

Correction — $A \in \left((\mathrm{Vect}(I_n))^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{Vect}(I_n)$ (dim. finie). On peut aussi observer que les formes linéaire $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ et $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$ s'annulent sur le même hyperplan. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Tr}(AM) = \lambda\,\mathrm{Tr}(M)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathrm{Tr}((A - \lambda I_n)M) = 0$ et il suffit de prendre $M = (A - \lambda I_n)^{\top}$ pour conclure. Ce raisonnement présente l'avantage d'être encore valable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

♣ **Exercice 5 —** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f^3 = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$.
2. En déduire que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Indication — 2. On travaille en dimension finie donc...

Correction —

1. Soit $y \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$. Comme $y = f(x) - x$ avec $x \in E$, $f^2(y) + f(y) + y = f^3(x) - x = 0_E$.
2. En appliquant le théorème du rang à $g = f - \mathrm{id}_E$,

   $$\dim(\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)) + \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)) = \dim(E)$$

   De plus, si $x \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$,

   $$f^2(x) + f(x) + x = 0_E \quad \text{et} \quad f(x) - x = 0_E$$

   Il vient $3x = 0_E$ puis $x = 0_E$.

♣ **Exercice 6 —** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur. On pose $q = \mathrm{id}_E - p$ et on considère :

$$\mathscr{F} = \{u \circ p \mid u \in \mathscr{L}(E)\} \quad \text{et} \quad \mathscr{G} = \{u \circ q \mid u \in \mathscr{L}(E)\}$$

1. Montrer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que $\mathscr{L}(E) = \mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$.

Indication —

1. On peut s'aventurer hors de la stabilité par combinaison linéaire.
2. Que peut-on dire de $p + q$, $p \circ q$ et $q \circ p$?

Correction —

1. $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont l'image de $\mathscr{L}(E)$ par les endomorphismes $\phi : u \mapsto u \circ p$ et $\psi : u \mapsto u \circ p$.
2.
   - Montrons que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \{0_{\mathscr{L}(E)}\}$. Soit $f \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$. $f = u \circ p = v \circ q$ avec $u, v \in \mathscr{L}(E)$. $f \circ p = u \circ p \circ p = f$ mais aussi $f \circ p = v \circ q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ donc $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   - Montrons que $\mathscr{L}(E) = \mathscr{F} + \mathscr{G}$. Considérons $f \in \mathscr{L}(E)$. $f = f \circ \mathrm{id}_E = f \circ (p + q) = \underbrace{f \circ p}_{\in \mathscr{F}} + \underbrace{f \circ q}_{\in \mathscr{G}}$.

♣♣ **Exercice 7 —** Soit ϕ l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\phi(P) = (X^2+1)P'' + 4P' - 2P$.

1. Montrer que $\phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$.
2. Exprimer $\deg(\phi(P))$ en fonction de $\phi(P)$.
   En déduire que ϕ induit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer le noyau de ϕ.
4. Trouver tous les polynômes P vérifiant $\phi(P) = X$.

Indications —

2. On pourra distinguer les cas $n \neq 2$ et $n = 2$ en posant $P = aX^2 + bX + c$.
4. Sauriez-vous trouver une solution particulière ? les solutions de l'équation homogène ?

Correction —

2. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$. Le terme « dominant » de $\phi(P)$ est $[n(n-1)-2]a_n X^n$ si celui-ci est non nul.
   - si $n \neq 2$ alors $n(n-1) \neq 2$ et $\deg(P) = \deg(\phi(P))$.
   - si $\deg(P) = 2$ alors $P = aX^2 + bX + c$ conduit à $\phi(P) = 2(4a-b)X + 2(a+2b-c)$.

   En conclusion, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
3. D'après ce qui précède, si $\deg(P) \neq 2$, $\phi(P) = \tilde{0}$ implique $P = \tilde{0}$. Dans le cas où $n = 2$, on obtient $b = 4a$ et $c = 9a$, soit $P = a(X^2+4X+9)$.
   Ainsi, $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Vect}(X^2+4X+9)$.
4. $P = -X/2 - 1$ est une solution.
   Ainsi, $\mathscr{S} = \left\{-X/2 - 1 + a(X^2+4X+9), a \in \mathbb{R}\right\}$.

♣♣ **Exercice 8 —** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. On note F un sous-espace vectoriel de E.
   Montrer que $\dim(u^{-1}(F)) \leqslant \dim(F) + \dim(\mathrm{Ker}(u))$.
2. On suppose que u est nilpotent et $\mathrm{rg}(u) = n-1$.
   Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dim \mathrm{Ker}(u^k) = k$.

Indications — Considérer la restriction $u_{|u^{-1}(F)}$.

Correction —

1. Le théorème du rang (dimension finie) appliqué à $u_{|u^{-1}(F)}$ donne :
$$\begin{aligned}\dim(u^{-1}(F)) &= \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap u^{-1}(F)) + \mathrm{rg}(u_{|u^{-1}(F)}) \\ &= \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap u^{-1}(F)) + \dim(u(u^{-1}(F))) \\ &\leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(F)\end{aligned}$$
   car $u(u^{-1}(F)) \subset F$ et $\mathrm{Ker}(u) \cap u^{-1}(F) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
2. Appliquons le résultat précédent à $F = \mathrm{Ker}(u^k)$:
$$\dim(\mathrm{Ker}(u^{k+1})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u^k))$$
   En effet,
$$x \in u^{-1}(\mathrm{Ker}(u^k)) \iff u(x) \in \mathrm{Ker}(u^k) \iff x \in \mathrm{Ker}(u^{k+1})$$
   D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$.
   On dispose de l'inclusion naturelle $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$.
   Donc,
$$\dim(\mathrm{Ker}(u^k)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u^{k+1})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u^k)) + 1$$
   Enfin, $\dim(\mathrm{Ker}(u^n)) = n$ d'où l'égalité $\dim(\mathrm{Ker}(u^{k+1})) = \dim(\mathrm{Ker}(u^k)) + 1$, puis $\dim(\mathrm{Ker}(u^k)) = k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

♣♣ **Exercice 9 —** Soit $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ supposée de rang r et telle que $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$.

1. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, il existe $Y \in \mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ tel que :
$$M\begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix}$$
2. En déduire que $D = CA^{-1}B$.

Indications — Toute matrice de rang r est équivalente à J_r.

Correction —

1. Soit $X \in \mathscr{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$. M étant de rang r, il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = PJ_rQ$, où $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   Alors, en posant $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}$ avec $Q_1 \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$, $Q_2 \in \mathscr{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$, $Q_3 \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et $Q_4 \in \mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{K})$,
$$\begin{aligned} M\begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} &\iff J_rQ\begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix} = J_rQ\begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff Q_2X = Q_1Y \end{aligned}$$
   $Q_1 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$ en tant que matrice extraite de $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, il suffit donc de prendre $Y = Q_1^{-1}Q_2X$.
2. Un calcul direct prouve que :
$$M\begin{bmatrix} 0 \\ X \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} BX = AY \text{ i.e. } Y = A^{-1}BX \\ DX = CY \end{cases}$$
   Ainsi, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, $DX = CA^{-1}BX$.
   Bref, $D = CA^{-1}B$. *Pourquoi, d'ailleurs ?*

♣♣ **Exercice 10 —** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dim. finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que pour tous $i, j \in \mathbb{N}$,
$$\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+j})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u^i)) + \dim(\mathrm{Ker}(u^j))$$

Indications — Montrer plus généralement que pour tous $f, g \in \mathscr{L}(E)$, $\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$.

Correction — Le théorème du rang (dimension finie) appliqué à $g_{|\mathrm{Im}(f)}$ donne :
$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)) + \mathrm{rg}(g \circ f)$$
Donc $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(g)) + \mathrm{rg}(g \circ f)$, puis, de nouveau par théorème du rang :
$$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$$
En particulier, pour $f = u^i$ et $g = u^j$,
$$\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+j})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u^i)) + \dim(\mathrm{Ker}(u^j))$$

♣♣ **Exercice 11 —** On pose $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et on considère l'application ψ qui à toute fonction f de E associe la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad g(x) = \int_0^x 2tf(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que E est $\mathbb{R}$-e.v. de dimension infinie.
2. Prouver que ψ est un endomorphisme de E.
3. Étudier l'injectivité et la surjectivité de ψ. Conclure.
4. Déterminer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le s.e.v. $\mathrm{Ker}(\psi - \lambda \mathrm{id}_E)$.

Indications —

1. Exhiber la bonne famille !
2. Toute fonction dérivable est continue...
3. Dériver et bien réfléchir.
4. On résoudra une certaine équation différentielle.

Correction —

1. E est clairement un espace vectoriel et $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de E qui contient une infinité de vecteurs, c'est donc un espace de dimension infinie.
2. La linéarité découle de celle de l'intégrale ; ψ est par ailleurs à valeurs dans E car g est bien continue sur $\mathbb{R}^+$ en tant que primitive de $x \mapsto 2xf(x)$.
3. • Soit $f \in \mathrm{Ker}(\psi)$. g étant l'application nulle, g' l'est également, ce qui s'écrit :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad 2xf(x) = 0$$
Cela conduit à $f(x) = 0$ pour $x > 0$ et par **continuité** de f, f est bien nulle sur $\mathbb{R}^+$. Bref, ψ est injective.
   • L'application ψ ne peut être surjective : si elle l'était, pour toute fonction continue $g \in E$, il existerait $f \in E$ telle que $g = \psi(f)$. Mais donc g serait dérivable. Or certaines fonctions continues ne sont pas dérivables (la racine carrée par exemple). Absurde !
   • ψ est donc un exemple d'application linéaire qui est injective sans être surjective.
4. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\psi - \lambda \mathrm{id}_E)$. Cela implique $2xf(x) = \lambda f'(x)$. Pour $\lambda \neq 0$, on obtient $f(x) = A\exp\left(x^2/\lambda\right)$ où A est un réel quelconque.
Réciproquement, toute fonction de cette forme vérifie bien $\displaystyle\int_0^x 2tf(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x)$ (à vérifier). Ainsi,
   • pour $\lambda \neq 0$, $\mathrm{Ker}(\psi - \lambda \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \exp\left(x^2/\lambda\right)\right)$;
   • par ailleurs, comme déjà vu, $\mathrm{Ker}(\psi) = \{0_E\}$.

♣ **Exercice 12 —** Calculer les déterminants d'ordre quatre suivants sous forme factorisée :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \quad ; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Correction —

1. $D_1 = a(b-a)(c-b)(d-c)$. (pivot)
2. $D_2 = (c-a)^2(d-b)^2$. (déterminant par blocs)

♣ **Exercice 13 —**Calculer les déterminants :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & & & \\ 2 & 3 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 3 & 1 \\ & & & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Indication — Trouver une relation de récurrence que vérifient D_n et Δ_n.

Correction — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = 2^n - 1$ et $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$.

♣ **Exercice 14 —** Soient n un entier naturel impair et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, c'est-à-dire vérifiant $A^\top A = I_n$.

1. Montrer que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
2. On suppose désormais que $\det(A) = 1$. Montrer que la matrice $A - I_n$ n'est pas inversible.

Correction —

1. $\det(A^\top A) = \det(A)^2 = \det(I_n) = 1$.
2. Supposons que $\det(A) = 1$.
$$\begin{aligned}\det(A - I_n) &= \det(A - AA^\top) = \det(A)\det(I_n - A^\top) \\ &= \det(I_n - A) = (-1)^n \det(A - I_n)\end{aligned}$$
Comme n est impair, $\det(A - I_n) = 0$.

♣♣ **Exercice 15 —** Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geqslant k+2$. On pose :

$$P(x) = \begin{vmatrix} (x+1)^k & 2^k & 3^k & \dots & n^k \\ (x+2)^k & 3^k & 4^k & \dots & (n+1)^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x+n)^k & (n+1)^k & (n+2)^k & \dots & (2n-1)^k \end{vmatrix}$$

Calculer $P(x)$.

Indication — Ce déterminant est un polynôme en x. Quel est son degré ? Quelles sont ses racines ?

Correction — P est un polynôme de degré $\leqslant k$ et il admet au moins $k+1$ racines (par ex. $1, 2, \dots, n-1$) donc $P = \tilde{0}$.

♣♣♣ **Exercice 16 —** Soient $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$A = \begin{bmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

1. Montrer que A est inversible si et seulement si $B^2 - I_n$ l'est.
2. Donner son inverse sous cette condition.

Indication — 2. Trouver une matrice inverse de même forme.

Correction —

1. En effectuant les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_{n+1}$ et de même $C_2 \leftarrow C_2 - C_{n+2}$, …, $C_n \leftarrow C_n - C_{2n}$, on obtient :

$$\begin{vmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n - B & B \\ B - I_n & I_n \end{vmatrix}$$

On effectue alors les opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + L_1$, …, $L_{2n} \leftarrow L_{2n} + L_n$ pour avoir :

$$\begin{vmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n - B & B \\ 0 & I_n + B \end{vmatrix} = \det(I_n - B)\det(I_n + B)$$

2. Cherchons l'inverse sous la forme $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + BY & Y + BX \\ BX + Y & BY + X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} X + BY = I_n \\ BX + Y = 0_n \end{cases}$$

$(B^2 - I_n)X = -I_n$ et $(B^2 - I_n)Y = B$ donc au final,

$$\begin{cases} X = -(B^2 - I_n)^{-1} \\ Y = (B^2 - I_n)^{-1}B \end{cases}$$

♣♣♣ **Exercice 17 —** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $u \in \mathscr{L}(E)$.
On considère l'application définie sur E^n par :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Montrer que cette application est $\mathrm{Tr}(u)\det_{\mathscr{B}}$.

Indication — Que peut-on dire de deux formes n-linéaires alternées ?

Correction — Soit φ l'application définie sur E^n par :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

φ est une forme multilinéaire alternée comme somme de formes n-linéaires alternées.

Or, d'après le cours, toutes les formes n-linéaires sont proportionnelles. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \cdot \det_{\mathscr{B}}$.
De plus, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$. En posant $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, il vient :

$$\varphi(\mathscr{B}) = \lambda = \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_{k-1}, u(e_k), e_{k+1}, \dots, e_n)$$

De plus, $\det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_{k-1}, u(e_k), e_{k+1}, \dots, e_n)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{1,k} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,k} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & a_{k,k} & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & a_{n-1,k} & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{k,k}$$

où $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Donc $\varphi(\mathscr{B}) = \lambda = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(u)$ et $\varphi = \mathrm{Tr}(u)\det_{\mathscr{B}}$.