Variables aléatoires discrètes

PRÉPARATION 10

♣ Exercice 1 — *B.A.-BA de combinatoire*
On lance 5 dés honnêtes. Donner les probabilités :

1. d'avoir 5 numéros différents ;
2. d'avoir au moins un 1 ;
3. d'avoir au moins un multiple de 3 ;
4. d'avoir au moins deux faces identiques ;
5. que le produit des chiffres obtenus soit pair ;
6. d'avoir 2 numéros doublés et un numéro isolé.

Correction —

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{6!}{6^5}\ ; \quad \mathbf{P}(A_2) = 1 - \frac{5^5}{6^5}\ ; \quad \mathbf{P}(A_3) = 1 - \frac{4^5}{6^5}\ ;$$

$$\mathbf{P}(A_4) = 1 - \mathbf{P}(A_1)\ ; \quad \mathbf{P}(A_5) = 1 - \frac{3^5}{6^5}\ ;$$

$$\mathbf{P}(A_6) = \frac{\binom{6}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{1}{1}}{6^5}$$

♣♣ Exercice 2 —

1. Montrer que pour tout réel $x \in]-1,1[$,
$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^{k-n} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$
2. Une première pièce fait *pile* avec la probabilité p, une seconde avec la probabilité $q = 1-p$. On lance la première pièce jusqu'à obtenir le premier *pile* ; on note X le nombre de lancers. On lance X fois la seconde pièce, et on note Y le nombre de *pile*.
   (a) Calculer $\mathbf{P}(Y = 0)$.
   (b) Donner la loi de Y et vérifier que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = n) = 1$$

Correction —

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. Par dérivation terme à terme n fois,
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}$$
2. (a) $X \sim \mathscr{G}(p)$ et d'après la formule des proba. totales,
$$\mathbf{P}(Y = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = 0 | X = k) \cdot \mathbf{P}(X = k)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} p^k \cdot q^{k-1} p = \frac{p^2}{1-pq}$$
   (b) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et de même, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbf{P}(Y = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = n | X = k) \cdot \mathbf{P}(X = k)$$
$$= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} q^n p^{k-n} \cdot q^{k-1} p = \frac{p}{q^3} \cdot \left(\frac{q^2}{1-pq}\right)^{n+1}$$

♣♣ Exercice 3 —

1. Montrer que pour tout entier n,
$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$$
2. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue dans cette urne des tirages d'une boule sans remise jusqu'à l'obtention de toutes les boules noires. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires, i.e. le rang du tirage de la dernière boule noire.
Déterminer la loi de X ainsi que son espérance.

Correction —

1. Par récurrence, ou plus astucieusement par télescopage,
$$\sum_{p=n}^{2n} \binom{p}{n} = \sum_{p=n}^{2n} \left[\binom{p+1}{n+1} - \binom{p}{n+1}\right]$$
$$= \binom{2n+1}{n+1} - \binom{n}{n+1} = \binom{2n+1}{n+1}$$
2.
   - $X(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$.
   - Le résultat des tirages successifs peut être représenté par un mot de $2n$ lettres, avec n lettres N et n lettres B. Il y en a exactement $\binom{2n}{n}$: c'est le nombre de choix possibles pour positionner les lettres N par exemple. Par ailleurs, l'événement $(X = p)$, pour $p \in [\![n, 2n]\!]$, sera réalisé si et seulement la $p^{\text{ème}}$ lettre est N et qu'on a placé les $n-1$ autres lettres N avant, parmi les $p-1$ positions possibles.
   Ainsi, pour tout $p \in [\![n, 2n]\!]$, $\mathbf{P}(X = p) = \dfrac{\binom{p-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$.
   - Il suffit alors d'utiliser la question précédente pour calculer l'espérance :
$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{p=n}^{2n} p \binom{p-1}{n-1} = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \sum_{p=n}^{2n} \binom{p}{n} = \frac{n(2n+1)}{n+1}$$

♣♣ **Exercice 4 —** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{n}{2^{n+1}}$$

Une urne contient X boules numérotées de 1 à X. On effectue un tirage, au hasard, d'une boule, et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2. Quelle loi suit Y ?
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction —

1. $(X, Y)(\Omega) = (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = n, Y = k) &= \mathbf{P}(Y = k | X = n) \cdot \mathbf{P}(X = n) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n+1}} \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}\end{aligned}$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(X = n, Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^k}$$

Ainsi, $Y \sim \mathscr{G}(1/2)$.

3. Il n'y a pas indépendance :

$$\mathbf{P}(X = 2, Y = 3) = 0 \neq \mathbf{P}(X = 2) \times \mathbf{P}(Y = 3)$$

♣♣ **Exercice 5 —** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et N une variable aléatoire à valeurs entières, toutes définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.
Soit Y la fonction définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$$

Montrer que Y est une variable aléatoire discrète.

Correction —

- $Y(\Omega) \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n(\Omega)$ et les ensembles $X_n(\Omega)$ sont tous au plus dénombrables ; il en va de même pour $Y(\Omega)$.
- Soit $y \in Y(\Omega)$. Alors,

$$(Y = y) = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} ((X_n = y) \cap (N = n)) \in \mathscr{A}$$

où l'on a noté :

$$(Y = y) = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega) = y\}$$

♣♣♣ **Exercice 6 —** Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et suivant toutes la loi $\mathscr{G}(p)$, où $p \in]0, 1[$.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on note C_α l'événement :

$$C_\alpha = \left\{ \omega \in \Omega \mid \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge} \right\}$$

1. Calculer $\mathbf{P}(C_\alpha)$ pour $\alpha > 1$.
2. On suppose désormais que $\alpha \in]0, 1[$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^{1-\alpha}) \right) \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n^{1-\alpha}-1}$$

   où $q = 1 - p$. En déduire la limite de cette probabilité pour $k \to +\infty$.

   (b) Montrer que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^{1-\alpha}) \right) \right) = 0$$

   (c) Expliciter en français l'événement :

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} (X_n \leqslant n^{1-\alpha}) \right)$$

   (d) En déduire $\mathbf{P}(C_\alpha)$.

Correction —

1. Soit $\omega \in C_\alpha$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série converge (presque sûrement). $\mathbf{P}(C_\alpha) = 1$ pour $\alpha > 1$.

2. (a) Par sous-additivité dénombrable,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^{1-\alpha}) \right) \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n > n^{1-\alpha})$$

Rappelons que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n > r) = q^r$.
De plus, $n^{1-\alpha} - 1 < \lfloor n^{1-\alpha} \rfloor \leqslant n^{1-\alpha}$ et $q \in]0, 1[$. D'où,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^{1-\alpha}) \right) \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n^{1-\alpha}-1}$$

Cette somme étant le reste d'une série convergente (pourquoi ?), $\lim_{k \to +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^{1-\alpha}) \right) = 0$.

(b) On applique le théorème de continuité décroissante.

(c) « $X_n > n^{1-\alpha}$ pour un nombre fini d'entiers n ».

(d) Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant p$, $\dfrac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \geqslant \dfrac{1}{n^\alpha \cdot n^{1-\alpha}} = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, $\mathbf{P}(C_\alpha) = 0$ pour $\alpha \in]0, 1[$.

♣ **Exercice 7 —** Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer de façon directe puis à l'aide d'une fonction génératrice $\mathbf{E}[X(X-1)(X-2)\cdots(X-n)]$. *On justifiera son existence.*

Correction —

1. D'après la formule de transfert et sous réserve de sommabilité,

$$\mathbf{E}[X(X-1)\cdots(X-n)] = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n)pq^{k-1}$$

Par dérivation terme à terme de la somme de série entière $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n)x^{k-n-1}$$

$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n)q^{k-n-1}$ converge ainsi absolument pour tout $q \in]-1,1[$ et nous en déduisons de plus :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X(X-1)\cdots(X-n)] &= pq^n f^{(n+1)}(q)\\ &= \frac{pq^n(n+1)!}{(1-q)^{n+2}} = \left(\frac{q}{p}\right)^n \frac{(n+1)!}{p}\end{aligned}$$

2. $\mathbf{E}[X(X-1)\cdots(X-n)] = G_X^{(n)}(1) = \cdots = \left(\frac{q}{p}\right)^n \frac{(n+1)!}{p}$.

♣ **Exercice 8 —** Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ à valeurs entières. On note G_X sa fonction génératrice. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X=n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_X(\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$$

Correction — Soit $n \in \mathbb{N}$. Sous réserve d'interversion,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_X(\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{i(k-n)t}\mathbf{P}(X=n)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=k)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(k-n)t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=k)2\pi\delta_{n,k} = \mathbf{P}(X=n)\end{aligned}$$

Pour justifier l'intégration terme à terme, posons pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,2\pi]$,

$$f_k(t) = \mathrm{e}^{i(k-n)t}\mathbf{P}(X=k)$$

$\|f_k\|_\infty \leqslant \mathbf{P}(X=k)$ et $\sum \mathbf{P}(X=k)$ CV (de somme égale à 1). Ainsi, la série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[0,2\pi]$.

♣ **Exercice 9 —** Soit X une variable aléatoire discrète telle que $\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda$ avec $\lambda > 0$.

1. Montrer que :

$$\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathbf{P}\left((X-\lambda+1)^2 \geqslant (\lambda+1)^2\right)$$

2. En déduire $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda+1}$.

Correction —

1. $(X \geqslant 2\lambda) = ((X-\lambda+1) \geqslant \lambda+1)$, d'où l'inclusion $(X \geqslant 2\lambda) \subset \left((X-\lambda+1)^2 \geqslant (\lambda+1)^2\right)$. Par croissance de la probabilité, on obtient le résultat attendu.
2. La variable aléatoire *positive* $(X-\lambda+1)^2$ admettant un moment d'ordre 1, puisque $X \in L^2$, d'après l'inégalité de Markov :

$$\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{\mathbf{E}((X-\lambda+1)^2)}{(\lambda+1)^2}$$

Par linéarité de l'espérance, et grâce à la formule de Kœnig-Huygens, $\mathbf{E}((X-\lambda+1)^2) = \mathbf{V}(X-\lambda+1) + \mathbf{E}(X-\lambda+1)^2 = \lambda+1$. D'où $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda+1}$.

♣♣ **Exercice 10 —** Soit $\alpha > 0$. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires discrètes vérifiant $X_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} - X_n \sim \mathscr{P}(\alpha)$. On suppose que toutes les variables $X_{n+1} - X_n$ sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de $X_m - X_n$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$.
2. Justifier l'existence et calculer $\mathbf{E}(X_n(X_m - X_n))$. En déduire $\mathrm{cov}(X_n, X_m)$ pour $n < m$.
3. Donner la loi du couple (X_n, X_m).
4. Identifier la loi de X_n sachant $X_m = j$.
5. Donner la loi de $N = \min\{k \geqslant 1 \mid X_k \geqslant 1\}$.

Indication — 1. On notera que pour $n = 0$, on obtient la loi de X_m. 2. On justifiera l'indépendance de X_n et $X_m - X_n$. 4. On trouve une loi binomiale. 5. On trouve une loi géométrique.

Correction —

1. $X_m - X_n = \sum_{k=n}^{m-1}(X_{k+1} - X_k) \sim \mathscr{P}(\alpha(m-n))$ comme somme de $m-n$ variables indépendantes suivant la loi $\mathscr{P}(\alpha)$.
2. D'après le lemme des coalitions, $X_n = \sum_{k=0}^{n-1}(X_{k+1} - X_k)$ et $X_m - X_n = \sum_{k=n}^{m-1}(X_{k+1} - X_k)$ sont indépendantes.

De plus, ces deux variables admettent un moment d'ordre 2 (L^2 est un espace vectoriel). D'où l'existence de $\mathbf{E}(X_n(X_m - X_n))$ et $\operatorname{cov}(X_n, X_m)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_n(X_m - X_n)) &= \mathbf{E}(X_n)\mathbf{E}(X_m - X_n)\\ &= \alpha n \cdot \alpha(m-n) = \alpha^2 n(m-n)\end{aligned}$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_n, X_m) &= \mathbf{E}(X_n X_m) - \mathbf{E}(X_n)\mathbf{E}(X_m)\\ &= \mathbf{E}(X_n X_m) - \mathbf{E}(X_n)\mathbf{E}(X_m)\\ &= \mathbf{E}(X_n(X_m - X_n)) + \mathbf{E}(X_n)^2 - \mathbf{E}(X_n)\mathbf{E}(X_m)\\ &= \cdots = \alpha n\end{aligned}$$

3. Posons $Y = (X_n, X_m)$. $Y(\Omega) = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \leqslant j\}$. Pour de tels couples, par indépendance,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n = i, X_m = j) &= \mathbf{P}(X_n = i, X_m - X_n = j - i)\\ &= \mathbf{P}(X_n = i)\mathbf{P}(X_m - X_n = j - i)\\ &= \mathrm{e}^{-\alpha n}\frac{(\alpha n)^i}{i!}\mathrm{e}^{-\alpha(m-n)}\frac{(\alpha(m-n))^{j-i}}{(j-i)!}\\ &= \mathrm{e}^{-\alpha m}\alpha^j\frac{n^i(m-n)^{j-i}}{i!(j-i)!}\end{aligned}$$

4. $\mathbf{P}(X_n = i | X_m = j) = \dfrac{\mathbf{P}(X_n = i, X_m = j)}{\mathbf{P}(X_m = j)}$. On obtient :

$$\mathbf{P}(X_n = i | X_m = j) = \binom{j}{i}\frac{n^i}{m^j}(m-n)^{j-i} = \binom{j}{i}p^i(1-p)^{j-i}$$

où $p = n/m$. Ainsi, la loi conditionnelle est la loi binomiale de paramètre $(j, n/m)$.

5. $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $(N = k) = (X_{k-1} = 0) \cap (X_k - X_{k-1} > 0$. Par indépendance, on trouve :

$$\mathbf{P}(N = k) = \mathrm{e}^{-\alpha(k-1)}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha})$$

Ainsi, $N \sim \mathscr{G}(\mathrm{e}^{-\alpha})$.

♣♣ **Exercice 11 —** *Inégalité de Cantelli*

1. Soit Y une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 vérifiant $\mathbf{E}(Y) \geqslant 0$ et $\mathbf{E}(Y^2) > 0$. Montrer à l'aide de $Z = \mathbb{1}_{[Y>0]}$ que :

$$\mathbf{P}(Y > 0) \geqslant \frac{\mathbf{E}(Y)^2}{\mathbf{E}(Y^2)}$$

2. En déduire que pour toute variable aléatoire réelle X et pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) < \varepsilon) \geqslant \frac{\varepsilon^2}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2}$$

puis que $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{2\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2}$.

Indication — 1. On pourra appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à Y et Z.

Correction —

1. Y et Z admettant toutes deux un moment d'ordre 2, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\mathbf{E}(YZ)^2 \leqslant \mathbf{E}(Y^2)\mathbf{E}(Z^2)$$

$Y \leqslant YZ = Y\mathbb{1}_{[Y>0]}$ donc par croissance de l'espérance, $\mathbf{E}(Y) \leqslant \mathbf{E}(YZ)$. De plus, $\mathbf{E}(Z^2) = \mathbf{E}(\mathbb{1}_{[Y>0]}) = \mathbf{P}(Y > 0)$. $\mathbf{E}(Y) \geqslant 0$ donc $\mathbf{E}(Y)^2 \leqslant \mathbf{E}(YZ)^2 \leqslant \mathbf{E}(Y^2) \cdot \mathbf{P}(Y > 0)$.

2. Posons $Y = \varepsilon - (X - \mathbf{E}(X))$. $\mathbf{E}(Y) = \varepsilon \geqslant 0$ et,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y^2) &= \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X))\\ &= \mathbf{V}(X) + \varepsilon^2 > 0\end{aligned}$$

L'inégalité précédente donne alors :

$$\mathbf{P}(Y > 0) = \mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) < \varepsilon) \geqslant \frac{\varepsilon^2}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) \geqslant \varepsilon) &= 1 - \mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) < \varepsilon)\\ &\leqslant 1 - \frac{\varepsilon^2}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2} = \frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2}\end{aligned}$$

L'inégalité précédente est valable pour $-X$. Ainsi, par σ-additivité,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) &= \mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) \geqslant \varepsilon) + \mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) \leqslant -\varepsilon)\\ &\leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2} + \frac{\mathbf{V}(-X)}{\mathbf{V}(-X) + \varepsilon^2} = \frac{2\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2}\end{aligned}$$