Topologie

Préparation 11

♣ **Exercice 1 —** Soient E un e.v.n. et $A \subset E$.

1. Montrer que : A fermée $\iff \mathrm{Fr}(A) \subset A$.
2. Montrer que : A ouverte $\iff A \cap \mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Correction —

1. Si A est fermée, $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = A \setminus \mathring{A} \subset A$.
   Réciproquement, si $\mathrm{Fr}(A) \subset A$, $\overline{A} = \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}(A) \subset A$.
2. A est ouverte ssi A^c est fermée. D'après la caractérisation précédente, la condition est équivalente à $\mathrm{Fr}(A^c) \subset A^c$. Comme $\mathrm{Fr}(A^c) = \mathrm{Fr}(A)$, A est ouverte ssi $\mathrm{Fr}(A) \subset A^c$, c'est-à-dire $A \cap \mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

♣ **Exercice 2 —** On munit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pose :

$$F = \left\{ f \in E \;\middle|\; f(0) = f(1) = 0, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\pi}{2} \right\}$$

Montrer que F est un fermé de E.

Correction — F est l'intersection des trois fermés (comme images réciproques de fermés par des fonctions continues) :

$$F_1 = \varphi_1^{-1}(\{0\}), \quad F_2 = \varphi_2^{-1}(\{0\}), \quad F_3 = \varphi_3^{-1}([\pi/2, +\infty[)$$

où $\varphi_1 : f \mapsto f(0)$, $\varphi_1 : f \mapsto f(1)$ et $\varphi_1 : f \mapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ sont toutes les trois linéaires et bien continues sur E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ puisque :

$$\forall k \in \{1,2,3\}, \quad \forall f \in E, \quad |\varphi_k(f)| \leqslant \|f\|_\infty$$

♣♣ **Exercice 3 —** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\lim_{k\to+\infty} M^k = 0 \iff \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} |\lambda| < 1$$

Établir sous cette condition que $\sum_{k\in\mathbb{N}} M^k$ converge.

Indication — Réduire M à l'aide des sous-espaces caractéristiques ($\to$ décomposition de Dunford).

Correction —

- Supposons que $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
  Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et X un $\overrightarrow{\text{vp}}$ associé. $M^p X = \lambda^p X$ et en divisant par $\|X\| \neq 0$, $|\lambda^p| \leqslant |||M^p||| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$. D'où $|\lambda| < 1$.
- Supposons que $\max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(M)} |\lambda| < 1$. M étant trigonalisable, il existe T triangulaire supérieure et P inversible telles que $M = PTP^{-1}$ et donc $M^k = PT^kP^{-1}$. D'après le cours, on peut choisir $T = \mathrm{diag}(T_1, \dots, T_r)$ avec $T_i = \lambda_i I_{n_i} + N_i$ où N_i est nilpotente. À l'aide de la formule du binôme, on montre que $T_i^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et donc $T^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

Classiquement, $(I_n - M)\sum_{k=0}^{p} M^k = I_n - M^{p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} I_n$ donc la série converge et sa somme vaut $(I_n - M)^{-1}$.

♣ **Exercice 4 —** *Fonction coercive*
Soient E un espace vectoriel normé de dim. finie et $f : E \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que f atteint un minimum.

Indication — On adapte la preuve du cas $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

Correction — Par définition de la limite,

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists r > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x\| > r \implies f(x) > A$$

Choisissons $A = f(0)$ et soit $r > 0$ un réel adapté.
Puisque $\inf_{\|x\|>r} f(x) \geqslant f(0)$, $\inf_{x\in E} f(x) = \inf_{x\in B_f(0,r)} f(x)$.
Comme E est de dimension finie, $B_f(0,r)$ est compacte.
D'où l'existence d'un minimum atteint par f sur $B_f(0,r)$.

♣♣ **Exercice 5 —** *Distance à une partie et compacité*
Soit A une partie fermée non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On pose :

$$d(x,A) = \inf_{y\in A} \|x - y\|$$

1. Soit $x \in E$. Montrer que lorsque A est compacte, il existe $y_0 \in A$ tel que $d(x,A) = \|x - y_0\|$. Vérifier que ce résultat subsiste sans hypothèse de compacité.
2. On considère un fermé non vide B tel que $A \cap B = \varnothing$. Construire à l'aide de $d(\bullet, A)$ et $d(\bullet, B)$ deux ouverts U et V disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.
3. On suppose A compacte. Montrer qu'il existe $(a,b) \in A^2$ tels que pour tout $(x,y) \in A^2$, $\|x - y\| \leqslant \|a - b\|$.

Indications — 1. Si F n'est pas compacte, se ramener à un compact en considérant une boule fermé. 2. Construire l'ensemble des points plus proches de A que de B et inversement.

Correction —

1. Soit $x \in E$. $y \mapsto \|x - y\|$ étant continue sur le compact A, elle atteint en minimum en mettons $y_0 \in A$. Ainsi, $d(x,A) = \|x - y_0\|$. Lorsque A n'est plus compacte, il suffit de considérer une boule centrée en x et intersectant A, supposée non vide. Soit $r > 0$ tel que $B_f(x,r) \cap A \neq \varnothing$. $K = B_f(x,r) \cap A$ est une partie fermée et bornée donc compacte puisque $\dim(E) < +\infty$. On montre facilement que $d(x,A) = d(x,K)$ pour conclure.
2. On « regroupe » les points selon leur proximité avec A ou B. On pose pour cela $U = \{x \in E \mid d(x,A) < d(x,B)\}$ et $V = \{x \in E \mid d(x,A) > d(x,B)\}$. Par continuité des applications lipschitziennes $d(\bullet,A)$ et $d(\bullet,B)$, U et V sont ouvertes. Comme $A \cap B = \varnothing$, $A \subset U$ et $B \subset V$.

3. L'application $\varphi : (x,y) \mapsto \|x-y\|$ est continue sur le compact A^2 comme composée des applications continues $\|\cdot\|$ et $(x,y) \mapsto x-y$. Elle atteint donc un maximum en, mettons, un couple $(a,b) \in A^2$. Alors, pour tout $(x,y) \in A^2$, $\varphi(x,y) = \|x-y\| \leqslant \|a-b\| = \varphi(a,b)$.

♣♣ **Exercice 6 —** Montrer que l'ensemble $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles diagonalisables est connexe par arcs.

Indication — Relier continûment toute matrice diagonalisable à la matrice I_n ; $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ est une partie étoilée.

Correction — Soit $A \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$. On note D une matrice diagonale telle que $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Il suffit alors de poser $\gamma(t) = (1-t)A + tI_n$. On notera que γ est continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ puisque $P^{-1}\gamma(t)P = (1-t)D + tI_n$ est diagonale.

♣♣ **Exercice 7 —** *Une histoire de points fixes*
Soient E un e.v.n. de dimension finie et F un fermé non vide de E. On considère une application lipschitzienne $f : F \to F$ de rapport k et la suite définie par $x_0 \in F$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

1. *Une version faible du théorème de Picard*
Montrer que si $k \in]0,1[$, $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge et que f admet un unique point fixe.
2. *Théorème de Brouwer*
On suppose que $k = 1$ et que F est de plus convexe et borné. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_n : x \mapsto \dfrac{x_0}{n} + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) f(x)$ est lipschitzienne.
En déduire que f admet un point fixe.

Indications — 1. Par convergence absolue. 2. On se ramène à la question 1. puis on introduit une valeur d'adhérence.

Correction —

1. La série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge absolument donc converge. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k \cdot \|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \cdots \leqslant k^n \cdot \|x_1 - x_0\|$$

La convergence de $\sum k^n$, puisque $k \in [0,1[$, nous permet de conclure. D'où la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\ell \in E$. Par continuité de f, $f(\ell) = \ell$. f admet bien un point fixe. Soit ℓ' est un autre point fixe. Si $\|\ell - \ell'\| \neq 0$,

$$\|\ell - \ell'\| = \|f(\ell) - f(\ell')\| \leqslant k \cdot \|\ell - \ell'\| < \|\ell - \ell'\|$$

D'où la contradiction : $\ell' = \ell$.

2. F est un convexe compact car $\dim(E) < +\infty$. La convexité nous assure que f_n est à valeurs dans F. Or,

$$\forall x, y \in F, \quad \|f_n(x) - f_n(y)\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x - y\|$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n vérifie la condition de 1. et admet ainsi un point fixe noté x_n. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ du compact F admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ convergente, de limite ℓ. L'égalité $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$ se traduit par :

$$\frac{x_0}{\varphi(n)} + \left(1 - \frac{1}{\varphi(n)}\right) f(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$$

Un passage à la limite donne par continuité $f(\ell) = \ell$.

♣♣♣ **Exercice 8 —** *Norme d'une forme linéaire*
Soient φ une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel normé E et $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

1. Montrer que φ est continue si et seulement si H est un fermé de E.
2. On suppose φ continue. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad d(x,H) = \frac{|\varphi(x)|}{|||\varphi|||}$$

Indications — 1. Par l'absurde, en mq $\mathrm{Ker}(\varphi) = E$ par construction pour $x \in E$ d'une suite de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ convergeant vers x. 2. Par double inégalité, avec $E = H \oplus \mathrm{Vect}(x)$ si $x \notin H$.

Correction —

1. Si φ est continue, $H = \varphi^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque du fermé $\{0_E\}$ par une fonction continue donc un fermé. Supposons maintenant que H est un fermé de E et que φ n'est pas continue pour aboutir à une contradiction. Soit $y \in E$. φ n'étant pas bornée sur $\mathscr{S}(0,1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe u_n unitaire tel que $|\varphi(u_n)| > n$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u_n)} u_n$$

Par construction,

$$x_n \in \mathrm{Ker}(\varphi) \text{ et } \|x - x_n\| = \frac{|\varphi(x)|}{|\varphi(x_n)|} \leqslant \frac{|\varphi(x)|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fermé donc $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. φ est nulle, absurde.

2. On suppose φ continue. On notera que l'égalité demandée est évidente pour $x \in H$. Supposons maintenant que $x \notin H$. Comme H est fermé, $d(x,H) > 0$.

$$\forall h \in H, \quad |\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(h)| \leqslant |||\varphi||| \cdot \|x - h\|$$

Par passage à la borne inf., $|\varphi(x)| \leqslant |||\varphi||| \cdot d(x,H)$.
Il reste à prouver l'inégalité inverse, ce qui revient à montrer (avant de passer à la borne supérieure) que :

$$\forall y \in E, \quad |\varphi(y)| \leqslant \frac{|\varphi(x)|}{d(x,H)} \cdot \|y\|$$

Soit $y \in E$. $E = H \oplus \mathrm{Vect}(x)$ donc $y = h + \lambda x$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, et prenons même $\lambda \in \mathbb{K}^*$ car l'inégalité est triviale pour $\lambda = 0$. $\varphi(y) = \lambda\varphi(x)$ et :

$$\|y\| = |\lambda| \cdot \left\|x + \frac{h}{\lambda}\right\| \geqslant |\lambda| \cdot d(x,H)$$

D'où $|\varphi(y)| \leqslant \dfrac{|\varphi(x)|}{d(x,H)} \cdot \|y\|$ et, donc, $d(x,H) = \dfrac{|\varphi(x)|}{|||\varphi|||}$.