Espaces préhilbertiens réels

PRÉPARATION 12

♣ Exercice 1 —

1. Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout n-uplet $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$,
$$\frac{1}{\sqrt{n}}(|a_1|+\cdots+|a_n|)\leqslant\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$$
2. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Correction —

1. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $a=(|a_1|,\dots,|a_n|)$ et $b=(1,\dots,1)$ de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
2. Il y a égalité si, et seulement si, $a_1=\cdots=a_n$.

♣ Exercice 2 — Pour $P,Q\in E=\mathbb{R}_2[X]$, on pose :
$$(P|Q)=P(1)Q(1)+P(0)Q(0)+P(-1)Q(-1)$$
Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire et déterminer une base orthonormée pour ce produit scalaire. Calculer enfin $d(X^2,\mathbb{R}_1[X])$.

Correction —

1. Si $(P|P)=0$ alors -1, 0 et 1 sont racines de P, polynôme de degré *au plus 2*, donc $P=\tilde{0}$.
2. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{X}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(X^2-\frac{2}{3}\right)\right)$ par orthonormalisation.
3. $d(X^2,\mathbb{R}_1[X])=\|X^2-p(X^2)\|=(X^2|P_3)P_3=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

♣ Exercice 3 — Soit $E=\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Soit $F=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ avec :
$$v_1=(0,3,1,-1)\quad\text{et}\quad v_2=(1,2,-1,1).$$

1. Déterminer un système d'équations de $F^\perp$ puis une base orthonormée (v_3,v_4) de $F^\perp$.
2. Exprimer à l'aide de v_3 et v_4 la matrice dans la base canonique de la proj. orthogonale sur F.

Correction —

1. $u\in F^\perp\iff\begin{cases}3y+z-t=0\\x+2y-z+t=0\end{cases}$ puis,
$$u\in F^\perp\iff\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-5\\1\\0\\3\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$
Donc $F^\perp=\mathrm{Vect}((0,0,1,1),(-5,1,0,3))$. Il reste à orthonormaliser cette base via la méthode de Gram-Schmidt. Après calculs, $F^\perp=\mathrm{Vect}\big(v_3,v_4\big)$ où :
$$v_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)\quad\text{et}\quad v_4=\frac{1}{\sqrt{122}}(-10,2,-3,3)$$
2. En notant p la projection orthogonale sur F,
$$\forall u\in E,\quad p(u)=u-(u|v_3)v_3-(u|v_4)v_4$$
On obtient la matrice $I_4-V_3V_3^\top-V_4V_4^\top$.

♣ Exercice 4 — Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}^\perp=F^\perp$.

Correction — $F\subset\overline{F}$ donc $\overline{F}^\perp\subset F^\perp$. Soit maintenant $x\in F^\perp$. Montrons que pour tout $y\in\overline{F}$, $(x|y)=0$. Pour cela, considérons $y\in\overline{F}$ et une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F convergeant vers y.
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (x|y_n)=0 \text{ car } y_n\in F$$
Il ne reste plus qu'à passer à la limite, par continuité du produit scalaire, pour obtenir $(x|y)=0$. Le produit scalaire est bien continu, en tant que forme bilinéaire vérifiant :
$$\forall a,b\in E,\quad |(a|b)|\leqslant\|a\|\cdot\|b\|$$

♣♣ Exercice 5 — Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ vérifiant la condition $f(0)=0$. Montrer que :
$$f^2(x)\leqslant x\int_0^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Indication — Distinguer les cas $x\geqslant 0$, $x<0$ et penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Correction — On munit $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ du produit scalaire :
$$(f|g)=\int_0^x fg \text{ si } x\geqslant 0 \text{ et } (f|g)=-\int_0^x fg \text{ si } x<0$$
On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à f' et $x\mapsto 1$.

♣♣ Exercice 6 — *Polynômes de Legendre*
On munit $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $(f|g)=\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. On pose $P_n=\frac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$, où $U_n=(X-1)^n(X+1)^n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
2. Montrer que $\deg(P_n)=n$.
3. Prouver que $P_n\in\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.

Indications — 1. Utiliser la formule de Taylor. 3. Effectuer n intégrations par parties.

Correction —

1. $P_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k$.
   D'où $P_n(1)=1$ et $P_n(-1)=(-1)^n$.
2. $\deg(U_n)=2n$ donc $\deg(P_n)=n$. Soit $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On effectue une intégration par parties généralisées :
   $$(P_n|Q)=(-1)^n\int_0^1 U_n(t)Q^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t=0$$
   car 1 et -1 sont racines de U_n d'ordre n. $P_n\in\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

♣♣ **Exercice 7 —** On cherche à calculer pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\delta_n=\inf_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n}\int_0^1\left(1+\alpha_1 t+\cdots+\alpha_n t^n\right)^2\,\mathrm{d}t$$

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall P,Q\in\mathbb{R}[X],\quad (P|Q)=\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

On note P_n le projeté $\perp$ de 1 sur $F=\mathrm{Vect}(X,\ldots,X^n)$.
On écrit $P_n=-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\beta_k X^k$, où $(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que :
   $$\delta_n=\int_0^1\left(1+\beta_1 t+\cdots+\beta_n t^n\right)^2\,\mathrm{d}t$$
2. On pose $R(X)=\dfrac{1}{X+1}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\beta_k}{X+k+1}$.
   Au moyen de $(1-P_n|X^i)$, montrer que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $R(k)=0$. En déduire $R(0)$.
3. Exprimer δ_n en fonction de n.

Indication — 2. R peut s'écrire sous la forme P/Q avec $P=\lambda(X-1)\cdots(X-n)$. Évaluer $(X+1)R$ en -1 pour déterminer la valeur de λ, donc de $R(0)$.

Correction —

1. $P_n\in F=\mathrm{Vect}(X,\ldots,X^n)$ donc il existe un unique n-uplet $(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $P_n=-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\beta_k X^k$. De plus,
   $$\delta_n=\inf_{P\in F}\|1-P\|^2=d(1,F)^2=\|1-P_n\|^2$$
2. $1-P_n\in F^{\perp}$ donc pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $(1-P_n|X^i)=0$.
   Donc $(1-P_n|X^i)=\displaystyle\int_0^1\left(t^i+\sum_{k=1}^{n}\beta_k t^{i+k}\right)\mathrm{d}t=R(i)=0$.
   $R=P/Q$ où $Q=(X+1)\cdots(X+n+1)$ et $\deg(P)\leqslant n$.
   De ce qui précède, $P=\lambda(X-1)\cdots(X-n)$. $(X+1)R$ évalué en -1 donne $\lambda=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$. D'où $R(0)=\dfrac{1}{(n+1)^2}$.
3. $\delta_n=\|1-P_n\|^2=(1-P_n|1-P_n)=(1-P_n|1)=R(0)$ puisque $1-P_n\perp P_n\in F$ donc $\delta_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}$.