Équations différentielles linéaires

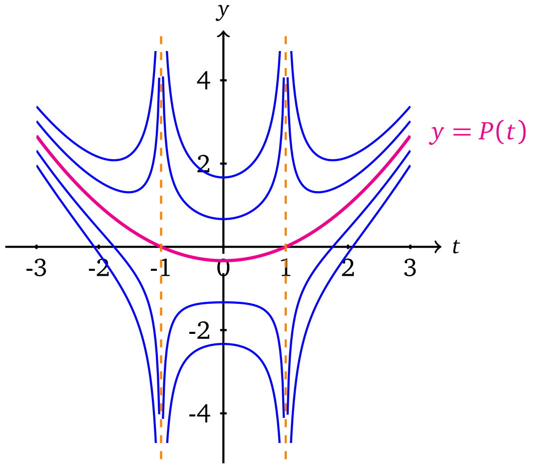
PRÉPARATION 15

♣ **Exercice 1 —** On considère l'équation différentielle $(t^2-1)y'+ty=t^3-t \quad (\mathscr{E})$.

1. Donner les solutions polynomiales de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre $(\mathscr{E})$ sur chacun des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,+\infty[$.
3. En déduire les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$.

Correction —

1. Une analyse de degré nous pousse à rechercher P sous la forme $P(t)=at^2+bt+c$. On trouve $P(t)=\frac{1}{3}(t^2-1)$.
2. On trouve $y(t)=\frac{1}{3}(t^2-1)+\frac{C}{\sqrt{|t^2-1|}}$ avec $C\in\mathbb{R}$.
3. y est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ ssi il existe trois constantes réelles C_1, C_2 et C_3 telles que :
$$\forall t\in I_i,\quad y(t)=P(t)+\frac{C_i}{\sqrt{|1-t^2|}}$$
en posant $I_1=]-\infty,-1[$, $I_2=]-1,1[$ et $I_3=]1,+\infty[$.



Pour des raisons de continuité (raccordement des solutions), on trouve $C_1=C_2=C_3=0$ en passant à la limite. Ainsi, P est l'unique solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$.

♣ **Exercice 2 —** On considère l'équation diff. :
$$x^2y''+4xy'+2y=\ln(1+x) \quad (*)$$

1. (a) Chercher les solutions de l'équation homogène associée sous la forme $x\mapsto x^\alpha$.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Résoudre enfin $(*)$ sur $]-1,+\infty[$ en posant $z(x)=x^2y(x)$.

Indication — Ne pas oublier de vérifier la continuité des solutions obtenues en 0...

Correction —

1. - En injectant, $\alpha^2+3\alpha+2=0$. Ainsi, $\alpha=-1$ ou $\alpha=-2$.
   - Comme l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est un espace vectoriel de dimension 2 (équation *linéaire sans second membre* d'ordre 2), celle-ci admet pour solution générale :
$$y(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2} \quad \text{où} \quad A,B\in\mathbb{R}$$
2. - Il s'agit ici de trouver une solution particulière de l'équation différentielle. En posant $z(x)=x^2y(x)$, on obtient $z''(x)=\ln(1+x)$. En intégrant, on a :
$$z(x)=\frac{(x+1)^2}{2}\ln(1+x)-\frac{3}{4}x^2$$
Pas besoin de rajouter de constantes d'intégration, on cherche ici une *solution.*
   - Si y est solution sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$, alors :
$$y(x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\ln(1+x)-\frac{3}{4}+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$$
avec $A,B\in\mathbb{R}$ (dépendant de l'intervalle d'intégration).
   - Reste à étudier la continuité (et même la double dérivabilité) des solutions sur $]-1,+\infty[$. Un problème apparaît en 0. Un développement asymptotique donne :
$$y(x)\underset{x\to0}{=}\frac{B}{x^2}+\frac{A+1/2}{x}+\frac{1}{6}x+\mathrm{o}(x)$$
On doit donc avoir $B=0$ et $A=-\frac{1}{2}$, soit :
$$y(x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\ln(1+x)-\frac{3}{4}-\frac{1}{2x}$$
   - Réciproquement, cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$, car développable en série entière sur $]-1,1[$. (à vérifier !)

♣ **Exercice 3 —** Résoudre le problème différentiel :
$$\begin{cases} x'=4x+y+z\\ y'=x+4y+z\\ z'=x+y+4z\end{cases} \text{avec} \begin{cases} x(0)=y(0)=2\\ z(0)=-1\end{cases}$$

Correction — Posons $A=\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$.

$A\in\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable d'après le théorème spectral. On trouve facilement $\chi_A=-(X-6)(X-3)^2$ puis :
$$E_6=\mathrm{Vect}((1,1,1))\ ;\quad E_3=\mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,0,-1))$$
Avec les notations classiques, $X=c_1\mathrm{e}^{6t}X_1+c_2\mathrm{e}^{3t}X_2+c_3\mathrm{e}^{3t}X_3$. Puis, au moyen des conditions initiales,
$$\begin{cases} x(t)=\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{6t}\\ y(t)=\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{6t}\\ z(t)=-2\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{6t}\end{cases}$$

♣♣ **Exercice 4 —** Résoudre l'équation différentielle $t^2y'' - 2y = 3t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}$ à l'aide de la méthode de variation des constantes.

Indication — On cherchera un système fondamental de solutions de l'équation homogène sous la forme $t \mapsto t^\alpha$.

Correction — Les fonctions $y_1 : t \mapsto t^2$ et $y_2 : t \mapsto t^{-1}$ sont solutions évidentes de l'équation homogène. Dès lors, on cherche les solutions de l'équation complète sous la forme :

$$y(t) = \lambda(t)t^2 + \frac{\mu(t)}{t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = 3t \end{cases}$$

On trouve $y(t) = \lambda_i t^2 + \dfrac{\mu_i}{t} + t^2 \ln|t|$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.
Les conditions de raccordement conduisent à l'inexistence d'une solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ et à la famille de solutions $t \mapsto \lambda t^2 + \dfrac{\mu}{t} + t^2 \ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

♣♣ **Exercice 5 —** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.
   Montrer que $\exp(N) = I_n + A$ où A est une matrice nilpotente qui commute avec N.
2. (a) On pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k!}$ et $Q_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{X^k}{k}$.
   Montrer que X^{n+1} divise $P_n \circ Q_n - X$.
   (b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.
   Établir l'existence d'une matrice nilpotente N telle que $\exp(N) = I_n + A$.

Indication — 2. On pensera aux développements limités.

Correction —

1. $\exp(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!} = I_n + A$ où $A = NP(N)$, $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{X^{k-1}}{k!}$.
   $AN = NA$. Par commut. de N et $P(N)$, A est nilpotente.
2. (a) En composant les DLs de $e^x - 1 \underset{x\to 0}{=} P_n(x) + o(x^n)$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} Q_n(x) + o(x^n)$, on obtient :
   $$P_n(Q_n(x)) \underset{x\to 0}{=} x + o(x^n)$$
   D'où le résultat : $P_n \circ Q_n = X + X^n R_n$ avec $\mathbb{R}_n \in \mathbb{R}[X]$.
   (b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. $N = Q_n(A)$ est nilpotente. D'où l'égalité :
   $$\begin{aligned} \exp(N) &= I_n + P_n(Q_n(A)) \\ &= I_n + A + A^n R_n(A) = I_n + A \end{aligned}$$

   La fonction exp établit ainsi une bijection entre les matrices nilpotentes et les matrices dites unipotentes.