

Calcul différentiel

PRÉPARATION 16

♣ **Exercice 1** — Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Déterminer les dérivées ou dérivées partielles premières de :

$$g_1(x, y) = f(y, x); \quad g_2(x) = f(x, x);$$

$$g_3(x) = f(x^2, x^3); \quad g_4(x, y) = f(y, f(x, x))$$

Correction — Par composition, les fonctions sont toutes de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 . Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

- $\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$ et $\frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$;
- $g'_2(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x)$;
- $g'_3(x) = 2x \frac{\partial f}{\partial x}(x^2, x^3) + 3x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x^2, x^3)$;
- $\frac{\partial g_4}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x) \right) \frac{\partial f}{\partial y}(y, f(x, x))$ et $\frac{\partial g_4}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, f(x, x))$.

♣ **Exercice 2** — Déterminer les extrema sur \mathbb{R}^2 de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 2x^2y - 2$.

Correction —

- f est polynomiale donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 .
- On recherche les points critiques sur l'ouvert \mathbb{R}^2 .

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff (x, y) \in \{(0, 0), (\pm 1/\sqrt{2}, -1/2)\}$$
- Pour identifier les extrema, on calcule les trois hessiennes suivantes :

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } H_f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{2} \\ \pm 2\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

La trace et le déterminant permettent de conclure : pour les deux derniers couples, les valeurs propres sont de signes opposés donc il s'agit de points selles. f admet un unique minimum, atteint en $(0, 0)$; il vaut -2 .

♣ **Exercice 3** — Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle a, x \rangle \cdot \langle b, x \rangle$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^n et donner sa hessienne en tout point.

Indication — Exprimer $f(x)$ sous forme de somme double.

Correction — Prenons $a = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $b = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i b_j x_i x_j$.

f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^n car polynomiale et :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = a_i b_j + a_j b_i$$

D'où $H_f(x) = (a_i b_j + a_j b_i)_{1 \leq i, j \leq n} = ab^\top + ba^\top \in S_n(\mathbb{R})$.

La hessienne est constante en tout point compte tenu du fait que f est polynomiale de degré 2. En fait, $f(x) = \frac{1}{2}x^\top H_f x$.

Il est possible de se dispenser du calcul via les coordonnées en différentiant df . Soient $x, h, k \in \mathbb{R}^n$.

$$f(x+h) - f(x) = \langle a, x \rangle \langle b, h \rangle + \langle a, h \rangle \langle b, x \rangle + \langle a, h \rangle \langle b, h \rangle$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle a, h \rangle \langle b, h \rangle = o(\|h\|)$ donc $df_x(h) = \langle a, x \rangle \langle b, h \rangle + \langle a, h \rangle \langle b, x \rangle$. De plus,

$$df_{x+k}(h) - df_x(h) = \langle a, k \rangle \langle b, h \rangle + \langle a, h \rangle \langle b, k \rangle = k^\top (ab^\top + ba^\top) h = k^\top H_f(x) h$$

♣♣ **Exercice 4** — Déterminer toutes les fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ vérifiant :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

On posera $u = xy$ et $v = \frac{y}{x}$.

Correction — Le changement de variables (bijectif et de classe \mathcal{C}^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$) conduit à dériver :

$$g(u, v) = g\left(xy, \frac{y}{x}\right) = f(x, y)$$

On trouve $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$ puis $f(x, y) = \varphi_1(xy) + \varphi_2(y/x)$ où φ_1, φ_2 sont des fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* .

♣♣ **Exercice 5** — *Théorème de Rolle généralisé*
 On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique et on note \mathcal{S} la sphère unité. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $f|_{\mathcal{S}}$ soit constante. Prouver qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_0\| < 1$ et df_{x_0} est nulle.

Indication — On introduira le minimum m et le maximum M atteint par f sur $\mathcal{B}_f(0, 1)$.

Correction —

- f est continue sur le compact $\mathcal{B}_f(0, 1)$ donc atteint un min. m en $x_* \in \mathcal{B}_f(0, 1)$ et un max. M en $x^* \in \mathcal{B}_f(0, 1)$.
- Si $m = M$, la fonction f est constante sur $\mathcal{B}_f(0, 1)$ donc df_x est nulle en tout point x de l'ouvert $\mathcal{B}(0, 1)$.
- En revanche, si $m < M$, f étant constante sur \mathcal{S} , au moins l'un des deux points x_*, x^* n'est pas dans \mathcal{S} . f atteignant un extremum en un point de l'ouvert $\mathcal{B}(0, 1)$, sa différentielle en ce point est nulle d'après le cours.

♣♣ **Exercice 6** — Une inégalité de Hardy

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, deux réels p, q tels que $1 < p \leq q$.
Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{1/q}$$

Indications — Les multiplicateurs de Lagrange sont vos amis.

Maximiser d'abord $\sum_{k=1}^n |x_k|^p$ sous la contrainte $\sum_{k=1}^n |x_k|^q = 1$.

Correction — Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, et quitte à travailler sur $(\mathbb{R}_+)^n$, on considère les deux applications définies par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k^p \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=1}^n x_k^q - 1$$

Elles sont de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+)^n \setminus \{0\}$.

On cherche à calculer, sous réserve d'existence, $\max_{g(x)=0} f(x)$.

• *Existence d'un maximum*

Un tel maximum existe puisque f est continue sur le compact $(\mathbb{R}_+)^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$ (sphère unité pour $\|\cdot\|_q$).

• *Recherche des points critiques*

Si x est un point critique de f sous la contrainte $g(x) = 0$, il existe $\lambda \neq 0$ tel que :

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \quad \text{i.e.} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad p x_k^{p-1} = \lambda q x_k^{q-1}$$

Les coefficients x_k sont soit nuls soit vérifient $x_k^{p-q} = \frac{q}{p} \lambda$. Les coordonnées non nulles de x sont ainsi toutes égales, mettons égales à un réel positif μ . La contrainte $g(x) = 0$ donne alors $m \mu^q = 1$ où $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est le nombre de coordonnées non nulles. D'où $\mu = \frac{1}{m^{1/q}}$.

• *Recherche du maximum*

En un tel point critique, $f(x) = m \mu^p = m^{1-p/q}$. $p/q \leq 1$ donc $f(x)$ est maximal pour $m = n$. Ainsi,

$$\forall x \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad g(x) = 0 \implies f(x) \leq n^{1-p/q}$$

avec égalité pour $x = \frac{1}{n^{1/q}}(1, \dots, 1)$.

Soit maintenant $y \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$y_k = |x_k| \cdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{-1/q}$$

Par construction, $g(y) = 0$. Donc $f(y) \leq n^{1-p/q}$, soit :

$$\sum_{k=1}^n |x_k|^p \leq n^{1-p/q} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{p/q}$$

Ainsi, $\|x\|_p \leq n^{1/p-1/q} \|x\|_q$.

♣♣♣ **Exercice 7** — Espace tangent à $O_n(\mathbb{R})$

Soient $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application $f : M \mapsto M^\top M$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur E et donner df_{I_n} .
2. Prouver, à l'aide de l'application $\gamma : t \mapsto e^{tA}$, que $T_{I_n} O_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que si $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $T_\Omega O_n(\mathbb{R}) = \Omega A_n(\mathbb{R})$.

Indication — 1. La norme usuelle est sous-multiplicative.

Correction —

1. f est de classe \mathcal{C}^1 par produit et transposition (application linéaire en dimension finie). Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$f(I_n + H) = (I_n + H)^\top (I_n + H) = I_n + H + H^\top + H^\top H$$

De plus, pour la norme euclidienne usuelle sur E ,

$$\|H^\top H\| \leq \|H\|^2 \text{ donc } H^\top H = o(\|H\|)$$

Ainsi, $f(I_n + H) = f(I_n) + H + H^\top + o(\|H\|)$.

$H \mapsto H + H^\top$ étant linéaire, $df_{I_n}(H) = H + H^\top$.

2. • Soit $A \in T_{I_n} O_n(\mathbb{R})$. Alors, il existe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow O_n(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 tel que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = A$.

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad f(\gamma(t)) = I_n$$

Ainsi, en différenciant, $df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$. En $t = 0$, on trouve $A + A^\top = 0$, i.e. $A \in A_n(\mathbb{R})$.

- Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. L'application $\gamma : t \mapsto e^{tA}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et à valeurs dans $O_n(\mathbb{R})$. En effet, si $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \gamma(t)^\top \gamma(t) &= \exp(tA)^\top \exp(tA) \\ &\stackrel{\text{cont. de la transp.}}{=} \exp(-tA) \exp(tA) \\ &\stackrel{(-tA)(tA) = (tA)(-tA)}{=} \exp(0) = I_n \end{aligned}$$

De plus, $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = A$ donc $A \in T_{I_n} O_n(\mathbb{R})$.

3. On reprend le même raisonnement avec cette fois-ci $df_\Omega(H) = \Omega^\top H + H^\top \Omega$ et $\gamma(t) = \Omega \exp(tA)$.