Réduction #1

PRÉPARATION 2

♣ **Exercice 1 —** Réduire les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

Correction —

1. $\chi_A = (X-3)(X+3)^2$. χ_A est scindé.
De plus, $\dim(\mathrm{Ker}(A+3I_3)) = 3 - \mathrm{rg}(A+3I_3) = 2$ donc A est diagonalisable. On a $D = P^{-1}AP$ avec, par exemple,

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.
   - $\chi_B = (X+2)(X-1)^2$. χ_B est scindé. Seulement, $\dim(\mathrm{Ker}(B-I_3)) = 3 - \mathrm{rg}(B-I_3) = 1$ donc B n'est pas diagonalisable.
   - χ_B étant néanmoins scindé, on peut trigonaliser B.
   - $X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ et $X_2 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 20 \end{bmatrix}^\top$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres -2 et 1.
   - Il reste à compléter la famille libre (X_1, X_2) en une base avec, par exemple, le vecteur $X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$.
   - On trouve alors $T = P^{-1}BP$ avec :

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -28/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 20 & 0 \end{bmatrix}.$$

♣ **Exercice 2 —** *Trigonalisation et puissances*

Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que M est semblable à la matrice :

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. En déduire M^n pour tout entier naturel n.

Indication — Considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M et construire une base adaptée ou bien chercher une matrice de passage de la forme $P = \dots$

Correction —

1. $\chi_M = (X-2)(X-1)^2$ est scindé, M est trigonalisable.
$X_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ et $X_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ sont des vecteurs propres associés aux vp 2 et 1. On pose alors :

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$$

et on résout $PT = MP$. On voit alors qu'on peut poser $a = 1$, $b = -1$ et $c = 0$. On vérifie que $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

2. Soient $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
$T = D + N$ avec $N^2 = O_3$. De plus, D et N commutent donc d'après la formule du binôme,

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$
$$= D^n + nND^{n-1} = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Au final, $M^n = (PTP^{-1})^n = PT^nP^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 2^n - n & 2^n - 1 & -n \\ n & 1 & n \\ 1 - 2^n + n & 1 - 2^n & 1 + n \end{bmatrix}$$

♣♣ **Exercice 3 —** *À l'aide d'un polynôme annulateur*
On considère la matrice :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

1. Calculer J^n.
2. En déduire les valeurs propres possibles de J.
3. En déduire les valeurs propres de J.
4. J est-elle diagonalisable ?

Indications —

3. À quelle condition sur $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ a-t-on $JX = \omega^k X$?

Correction —

1. $J^n = I_n$ car $f^p(e_k) = e_{k-p}$ si $k > p$, $f^p(e_k) = e_{n+k-p}$ sinon.
2. Si X est un vecteur propre de J associé à la valeur propre λ, on a $J^nX = \lambda^n X = X$ donc $\lambda^n = 1$ et les valeurs propres de J sont **des** racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.
3. Les racines de l'unité sont toutes valeurs propres de J :

$$JX = \omega^k X \iff X = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \vdots \\ \omega^{k(n-1)} \end{bmatrix} \quad \text{où } \omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}})$$

4. J possède n valeurs propres distinctes.

♣ **Exercice 4 —** Soit $A = \begin{bmatrix} a-1 & -3 & a \\ a & -4 & a \\ 3 & -a & 2 \end{bmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.
Trouver a pour que A ait une valeur propre double et soit diagonalisable.

Correction — $\chi_A = (X+1)(X^2+(2-a)X+a^2-a-8)$.

- A a une valeur propre double ssi -1 est racine de $X^2+(2-a)X+a^2-a-8$ ou si ce trinôme est de discriminant nul. On trouve $a \in \{\pm 3, \pm 2\sqrt{3}\}$
- Un calcul de rang pour les 4 valeurs de a possibles montre que A admet une valeur propre double et est diagonalisable seulement pour $a = \pm 3$.

♣♣ **Exercice 5 —** *Du côté des polynômes*
Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et deux réels distincts a et b.
Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $((X-a)^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Écrire la matrice de φ dans cette base et en déduire que φ est diagonalisable.

Correction —

1. La linéarité est immédiate. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, le terme de degré $n+1$ de $(X-a)(X-b)P'$ vaut $na_n X^{n+1}$, tout comme celui de nXP. Donc $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
2. Famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés.
3. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\varphi((X-a)^k) &= k(X-a)^k(X-b) - nX(X-a)^k \\ &= [(k-n)X - bk](X-a)^k \\ &= (k-n)(X-a)^{k+1} + (a(k-n)-bk)(X-a)^k\end{aligned}$$

La matrice obtenue est triangulaire, les valeurs propres $(a-b)k - an$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ se lisent sur la diagonale. Elles sont distinctes (à vérifier) donc φ est diagonalisable.

♣♣ **Exercice 6 —** *Du côté des matrices*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, avec $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\phi(M) = M - \mathrm{Tr}(M)A$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les éléments propres de ϕ et établir sa diagonalisabilité.

Correction — Recherchons les éléments propres de ϕ.
Soit $H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(M) = 0\}$. $\dim(H) = n^2 - 1$.

- Supposons que $\mathrm{Tr}(M) = 0$. $\phi(M) = M$. Ainsi, $H \subset E_1(\phi)$ et 1 est valeur propre d'ordre au moins $\dim(H) = n^2 - 1$.
- Supposons maintenant que $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$. Si $\phi(M) = \lambda M$ alors, en passant à la trace, $\lambda = 1 - \mathrm{Tr}(A)$. Donc $\mathrm{Tr}(M)A = \mathrm{Tr}(A)M$ ce qui montre que $M \in \mathrm{Vect}(A)$. Réciproquement, $\phi(A) = (1 - \mathrm{Tr}(A))A$. Donc $\mathrm{Vect}(A) = E_{1+\mathrm{Tr}(A)}(\phi)$.

Comme les valeurs propres sont distinctes, $E_1(\phi) = H$ et $E_{1-\mathrm{Tr}(A)} = \mathrm{Vect}(A)$. ϕ est bien diagonalisable car $\dim(E_1(\phi)) + \dim(E_{1-\mathrm{Tr}(A)}(\phi)) = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$.

♣♣♣ **Exercice 7 —** Soit ϕ l'application définie sur $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ par $\phi(f) = g$ où :

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer ses éléments propres

Indication — On découpera l'intégrale en explicitant le minimum et on fera apparaître une certaine équa. diff.
Correction — Remarquons que pour $x \in [0,1]$,

$$g(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad (*)$$

1. L'application ϕ est linéaire et g est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables (par théorème fondamental du calcul intégral). D'où la continuité de g, ce qui nous assure que $\phi(E) \subset E$.
2. On cherche à trouver les solutions de $\phi(f) = g = \lambda f$ en dérivant deux fois l'équation (la dérivabilité est à justifier soigneusement). On trouve $\lambda f''(x) + f(x) = 0$.
   - Si $\lambda = 0$, $f = 0$ et f n'est pas $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$. Ainsi, $0 \notin \mathrm{Sp}(\phi)$.
   - Si $\lambda > 0$, $f(x) = Ae^{-x/\sqrt{\lambda}} + Be^{x/\sqrt{\lambda}}$. $g(0) = 0$ et $g'(1) = 0$ donnent $A = B = 0$. $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$.
   - Si $\lambda < 0$, $f(x) = A\cos(x/\sqrt{-\lambda}) + B\sin(x/\sqrt{-\lambda})$. Les mêmes conditions donnent cette fois $A = 0$ et $\lambda_k = \frac{-4}{(2k+1)^2\pi^2}$. On vérifie que f est bien $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$.

   $\mathrm{Sp}(\phi) = \left\{\frac{-4}{(2k+1)^2\pi^2} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ et :

$$E_{\lambda_k}(\phi) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \sin\left((2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right)$$

♣♣♣ **Exercice 8 —** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, E étant un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie.

1. Montrer que si u est nilpotent et $\mathrm{rg}(u) = n-1$, alors son indice de nilpotence vaut n.
2. Montrer que lorsque u admet une unique droite stable, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u - \lambda \mathrm{id}_E$ est nilpotent d'indice n.

Indication — 1. Comparer $\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f))$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f))$, $\dim(\mathrm{Ker}(g))$.

Correction —

1. En considérant $u_{|\mathrm{Im}(u)}$, on obtient par récurrence $\dim(\mathrm{Ker}(u^{n-1})) \leqslant (n-1)\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n-1$.
   Ainsi, $\mathrm{Ker}(u^{n-1}) \neq E$ donc l'indice de nilpotence vaut n.
2. u admet au moins une valeur propre puisque χ_u admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. D'où l'existence d'au moins une droite stable. Supposons qu'il existe une seule droite. u ne peut alors admettre deux valeurs propres distinctes. Notons λ cette unique valeur. $u - \lambda \mathrm{id}_E$ est trigonalisable et 0 est sa seule valeur propre donc $u - \lambda \mathrm{id}_E$ est nilpotent. Par hypothèse, $\dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)) = 1$ donc $\mathrm{rg}(u - \lambda \mathrm{id}_E) = n-1$. Le tour est joué !