Réduction #2

PRÉPARATION 3

♣ **Exercice 1 —** *Matrices circulantes*
Soit $n \geqslant 2$. On considère la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{n-1} \\ m_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m_1 \\ m_1 & \cdots & m_{n-1} & m_0 \end{bmatrix}$$

On note A la matrice obtenue pour $m_1 = 1$ et $m_0 = m_2 = \cdots = m_{n-1} = 0$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A et exprimer ses valeurs propres à l'aide des racines n–ièmes de l'unité.
2. Montrer que la matrice M est diagonalisable.

Correction —

1. $A^n = I_n$ donc le polynôme scindé à racines simples $X^n - 1$ annule A. A est diagonalisable. On peut de plus vérifier que $\pi_A = X^n - 1$ (ou bien que $\chi_A = X^n - 1$).
Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{e^{2ik\pi/n}, 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$.
2. $M = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (PDP^{-1})^k = P \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (m_k D^k)}_{=\Delta} P^{-1}$.
M est semblable à la matrice diagonale Δ donc diagonalisable.

♣ **Exercice 2 —** Soit ψ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \psi(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$$

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ diagonalisable.
2. Quels sont ses éléments propres ?

Indication — Penser à bien vérifier que ψ est à valeurs dans $\mathbb{C}_n[X]$ et déterminer ψ^2.

Correction —

1. ψ est clairement linéaire et si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,

$$\psi(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k \in \mathbb{C}_n[X]$$

$\psi^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}_n[X]}$. ψ est une symétrie donc diagonalisable.
2. On résout alors $\psi(P) = P$ et $\psi(P) = -P$, en fonction de la parité de n. Par exemple, pour $n = 2p$,
   - $\left(X^{2p-k} + X^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ est une base de $E_1(\psi)$;
   - $\left(X^{2p-k} - X^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est une base de $E_{-1}(\psi)$.

♣ **Exercice 3 —** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non scalaire telle que $A^3 + A^2 - I_n = 0$.

1. Montrer que $\det(A) > 0$.
2. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Correction —

1. Une rapide étude de fonction montre que $P = X^3 + X^2 - 1$ admet une racine réelle $\alpha > 0$ et deux racines complexes conjuguées β et $\overline{\beta}$. Ce sont les seules valeurs propres possibles de A.

$$\chi_A = (X - \alpha)^{n-2k}(X - \beta)^k (X - \overline{\beta})^k$$

Précisons que comme $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, les ordres de multiplicité de β et $\overline{\beta}$ sont les mêmes.

$$\det(A) = \alpha^{n-2k} |\beta|^{2k} > 0$$

2.
   - Si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, $k = 0$ et alors α est n fois valeur propre. Cela n'est possible qu'à condition que $A = \alpha I_n$, condition exclue par l'énoncé.
   - P est scindé sur $\mathbb{C}$ et à racines simples, A est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

♣♣ **Exercice 4 —** Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u \circ v = v \circ u$, où E est un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie non nulle. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

Correction —

- χ_u est scindé sur $\mathbb{C}$ et $\deg(\chi_u) = \dim(E) \geqslant 1$ donc u admet au moins une valeur propre notée λ.
- $E_\lambda(u)$ est stable par v. En effet, pour tout $x \in E_\lambda(u)$,

$$u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda v(x) \quad \text{donc} \quad v(x) \in E_\lambda(u)$$

- L'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$ admet lui aussi une valeur propre μ puisque $\dim(E_\lambda(u)) \geqslant 1$. Il existe donc $x \in E_\lambda(u)$ tel que $v(x) = \mu x$ (et bien entendu, $u(x) = \lambda x$). On tient notre vecteur propre commun !

♣♣ **Exercice 5 —** Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension quelconque et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u admet un polynôme minimal noté μ_u. Montrer que les valeurs propres de u son exactement les racines de μ_u.

Correction — Une valeur propre est racine de tout polynôme annulateur de u donc racine du polynôme minimal.
Réciproquement, considérons une racine λ de μ_u. Alors,

$$\mu_u = (X - \lambda)P \quad \text{avec} \quad P(u) \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$$

puisque μ_u est minimal. Soit $x \in E$ tel que $y = P(u)(x) \neq 0_E$. $\mu_u(u)(x) = 0_E$ donc $y \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$. Mais de plus $y \neq 0_E$, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ comme souhaité.

♣♣ **Exercice 6 —** Montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 ($n \geqslant 2$) est diagonalisable ssi $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Indication — $A = CL$ où $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L = \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Correction — A est de rang 1 ssi il existe $(C, L) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ non nuls tel que $A = CL$. $A^2 = C(LC)L = \mathrm{Tr}(A)A$. De ce fait, $P = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X = X(X - \mathrm{Tr}(A))$ annule A.

- Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, P est simplement scindé donc A est diago.
- Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, A est nilpotente et non nulle (car de rang 1), donc non diagonalisable.

On pouvait aussi remarquer que $m(0) \geqslant \dim(E_0) = n-1$ pour conclure sans polynôme annulateur.

♣♣ **Exercice 7 —** Soient A et B deux matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = B^3$.
Montrer que $A = B$.

Indication — On pourra montrer que $X \mapsto AX$ et $X \mapsto BX$ coïncident sur chaque sous-espace propre de A.

Correction — Par diagonalisabilité de A, $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A)$.

Pour justifier que $A = B$, il nous suffit donc de prouver que pour tous $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X \in E_\lambda(A)$, $AX = BX = \lambda X$.

Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X \in E_\lambda(A)$. Par diagonalisabilité de B, il existe une base $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ de B associées aux vp notés respectivement $\mu_1, \dots, \mu_n$.

En écrivant $X = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k$ et en utilisant la relation $A^3 = B^3$,

$$B^3 X = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu_k^3 X_k = A^3 X = \lambda^3 X = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda^3 X_k$$

Par liberté, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k \mu_k^3 = \alpha_k \lambda^3$. Si $\alpha_k \neq 0$, $\mu_k = \lambda$ par bijectivité de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ et $\alpha_k \mu_k X = \alpha_k \lambda X$. Sinon, $\alpha_k X_k = 0$ et donc l'égalité $\alpha_k \mu_k X_k = \alpha_k \lambda X_k$ subsiste.

Concluons : $BX = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu_k X_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda X_k = \lambda X = AX$.

♣♣♣ **Exercice 8 —** Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\phi(M) = AM - MB$.
On souhaite prouver que :

$$\mathrm{Sp}(\phi) = \{\alpha - \beta \mid \alpha \in \mathrm{Sp}(A), \beta \in \mathrm{Sp}(B)\}$$

1. Justifier l'inclusion réciproque.
2. Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, à quelle condition nécessaire et suffisante la matrice $\chi_A(M)$ n'est-elle pas inversible ?
3. Montrer que si $M \in E_\lambda(\phi)$, $A^k M = M(B + \lambda I_n)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Conclure.

Indication — 1. On construira des vecteurs propres de ϕ à l'aide de vecteurs propres de A et de $B^\top$. 2. Expliciter $\chi_A(M)$.

Correction —

1. Soient $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$, $\beta \in \mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(B^\top)$ et $X, Y \in E_\alpha(A) \times E_\beta(B^\top)$ non nuls. On pose alors $M = XY^\top \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

   $$\phi(M) = AXY^\top - XY^\top B = \alpha XY^\top - \beta XY^\top = (\alpha - \beta)M$$

   On vérifie que M est non nulle. D'où $\alpha - \beta \in \mathrm{Sp}(\phi)$.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Posons $\chi_A = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les p valeurs propres distinctes de A.

   $$\chi_A(M) = \prod_{k=1}^{p} (M - \lambda_k I_n)^{m_k}$$

   La matrice $\chi_A(M)$ n'est pas inversible ssi l'un des facteurs n'est pas inversible, ce qui revient à dire que M possède une valeur propre commune avec A. On peut (ou pas !) utiliser le déterminant pour justifier l'équivalence.
3. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(\phi)$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle tels que $\phi(M) = AM - MB = \lambda M$. Alors, $AM = M(B + \lambda I_n)$. Par récurrence, on parvient aisément à l'égalité $A^k M = M(B + \lambda I_n)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par combinaison linéaire,

   $$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(A)M = MP(B + \lambda I_n)$$

   En particulier, grâce au théorème de Cayley-Hamilton, $M\chi_A(B + \lambda I_n) = 0$. $\chi_A(B + \lambda I_n) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, sinon M serait nulle, absurde par hypothèse.
   Conclusion : il existe $\alpha \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B + \lambda I_n)$, i.e. que l'on peut écrire $\lambda = \alpha - \beta$ avec $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\beta \in \mathrm{Sp}(B)$.

♣♣♣ **Exercice 9 —** *Endomorphismes semi-simples*
Un endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-e.v. E de dimension finie est dit semi-simple si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire stable par f.

1. On suppose ici $f \in \mathscr{L}(E)$ semi-simple.
   En considérant un sous-espace supplémentaire G de la somme des sous-espaces propres, montrer que f est diagonalisable.
2. On suppose ici $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable.
   a) Soit F un sous-espace stable par f.
   Montrer que $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (F \cap E_\lambda(f))$.
   b) En déduire que f est semi-simple.
3. Conclure.

Indication — 1. On montrera que tout valeur propre de $f_{|G}$ est valeur propre de f. 2.a) On considérera $f_{|F}$.

Correction — On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les vp distinctes de f.

1. Soient f semi-simple et $F = \bigoplus_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}(f)$.

   F étant stable par f, il admet un supplémentaire G stable par f. Si $G \neq \{0\}$, l'endomorphisme induit $f_{|G}$ admet une valeur propre λ ($\chi_{f_{|G}}$ scindé sur $\mathbb{C}$, de degré $\dim(G)$. C'est aussi une valeur propre de f, d'où la contradiction.
2. Soient f diagonalisable et F un sous-espace stable par f.
   $E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}(f)$ et $F = \bigoplus_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}(f_{|F}) = \bigoplus_{k=1}^{r} \left(E_{\lambda_k}(f) \cap F\right)$ puisque $f_{|F}$ est diagonalisable (cf. cours).
   Notons G_k un supplémentaire de $F_k = E_{\lambda_k}(f) \cap F$ dans $E_{\lambda_k}(f)$. $G = \bigoplus_{k=1}^{r} G_k$ est alors un supplémentaire de F dans E, stable par f puisque $G_k \subset E_{\lambda_k}(f)$.
3. Les endomophismes semi-simples d'un $\mathbb{C}$-e.v. sont les endomorphismes diagonalisables.