Séries numériques et familles sommables

PRÉPARATION 5

♣ **Exercice 1 —** Prouver la convergence et déterminer la somme des séries de terme général :

$$\frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}^n}\ ;\quad \frac{2}{n(n+1)}-\frac{5}{3^n}\ ;\quad \frac{n^2+2^n}{n!}$$

Correction — $-\mathrm{e}$ par télescopage, $-1/2$ par télescopage et série géométrique, $\mathrm{e}(\mathrm{e}+2)$ en reconnaissant une série exponentielle.

♣ **Exercice 2 —** Déterminer la nature des séries de terme général :

$$\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\ ;\quad n^{-\cos(1/n)}\ ;\quad n^{-\mathrm{ch}(1/n)}\ ;$$
$$\frac{\ln^n(n)}{n^{\ln n}}\ ;\quad \frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Correction —

1. converge (par équivalence à $1/n^2$) ;
2. diverge (par minoration par $1/n$) ;
3. diverge (par équivalence à $1/n$) ;
4. divergence grossière ;
5. converge vers $1-1/\sqrt{2}$ (par télescopage).

♣♣ **Exercice 3 —** Étudier la série de terme général $u_n=\cos\left(\pi\sqrt{1+n+n^2}\right)$.

Correction —

$$u_n=\cos(\pi\sqrt{1+n+n^2})\underset{n\to+\infty}{=}\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$=(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=v_n+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où l'on a posé $v_n=(-1)^{n+1}\dfrac{3\pi}{8n}$.

- $\sum v_n$ converge par critère spécial des séries alternées.
- $u_n-v_n=\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum(u_n-v_n)$ converge.

Ainsi, $\sum u_n$ converge comme somme de séries convergentes.

♣♣ **Exercice 4 —** Étudier la nature des séries de termes généraux $a_n=\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)$ puis $b_n=\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

Indication — Trouver un équivalent de a_n puis prouver que $(2-\sqrt{3})^n+(2+\sqrt{3})^n$ est un entier pair pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Correction — Posons $q=2-\sqrt{3}$. $|q|<1$ donc $q^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Ainsi, $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\pi q^n$ et on peut appliquer la règle des équivalents à notre série à termes positifs : $\sum a_n$ converge.
De plus, d'après la formule du binôme, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(2-\sqrt{3})^n+(2+\sqrt{3})^n=2\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}2^{n-2p}3^p\in 2\mathbb{N}$$

En notant $2q$ un tel entier,

$$b_n=\sin\left(2\pi q-\pi(2-\sqrt{3})^n\right)=-a_n$$

La série $\sum b_n$ est de même nature que $\sum a_n$.

♣♣ **Exercice 5 —** Préciser la nature des séries de termes généraux :

$$a_n=n^{1+1/n}\qquad b_n=\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$$
$$c_n=\frac{\cos\left(2\sqrt{n}\right)}{n^2}\qquad d_n=\sqrt[n]{n}$$
$$e_n=\binom{n}{2}a^{2n}\text{ où }a\in\mathbb{R}\qquad f_n=(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$$
$$g_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\qquad h_n=\frac{\ln(n)}{\ln(\mathrm{e}^n-1)}$$
$$i_n=(1+\sqrt{n})^{-n}\qquad j_n=\frac{\ln^n(n)}{n!}$$
$$k_n=\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{3+x^2}}\,\mathrm{d}x\qquad l_n=\int_0^{1/n}\frac{\sin^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$m_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\qquad p_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}$$

Correction —

a) diverge (par comparaison) ;
b) diverge (par équivalent) ;
c) converge (convergence absolue) ;
d) divergence (divergence grossière) ;
e) converge ssi $|a|<1$ (d'Alembert et DVG pour $|a|=1$) ;
f) converge (critère spécial des séries alternées) ;
g) diverge (par équivalent) ;
h) diverge (équivalent puis comparaison $\sum/\int$) ;
i) converge (par comparaison) ;
j) converge (d'Alembert) ;
k) converge $\left(k_n\leqslant\int_0^{1/n}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3n^{3/2}}\right)$;
l) converge $\left(l_n\leqslant\int_0^{1/n}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3n^3}\right)$;
m) diverge $\left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\geqslant\frac{1}{n+1}\text{ ou bien }m_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}\right)$;
p) converge (majoration du reste, CSSA).

♣♣ **Exercice 6 —** Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

1. Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. Vérifier alors que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{u_n}{v_n} \cdot \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$
2. En déduire que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \lambda$, $R_n \leqslant \dfrac{\lambda u_n}{1-\lambda}$.

Indication — S'intéresser à la monotonie de $(u_n/v_n)_{n\geqslant n_0}$.

Correction —

1. $u_n \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \cdot v_n$ donc par comparaison de SATP, $\sum u_n$ converge. De plus, pour tout $k \geqslant n \geqslant n_0$, $u_k \leqslant \frac{u_n}{v_n} \cdot v_k$. Il ne reste plus qu'à sommer.
2. On choisit $v_n = \lambda^n$.

♣♣ **Exercice 7 —** Pour α réel, on pose sous réserve d'existence, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
Préciser les valeurs de α pour lesquelles $\sum R_n$ converge et montrer qu'alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$.

Correction — Si $\alpha > 1$, $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}$ donc $\sum R_n$ CV ssi $\alpha > 2$ mais la sommabilité permet de contourner cette étude. Par positivité,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{0\leqslant n<k}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

Et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}} < +\infty$ ssi $\alpha > 2$. D'où la CNS de sommabilité.

♣♣ **Exercice 8 —** Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{n}}$.

Indication — Passer au ln et trouver un dév. asymptotique.

Correction — Posons $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$.

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \underset{k\to+\infty}{=} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$$

Or $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{-1}{2k} \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n)/2 + \mathrm{O}(1)$
Par sommation des relations de comparaison,

$$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n)/2 + \mathrm{O}(1)$$

Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-\ln(n)/2+\mathrm{O}(1)}$, soit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{\sqrt{n}}$.

♣♣♣ **Exercice 9 —** Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente. On note R_n son reste au rang n.
Établir la convergence de $\displaystyle\sum \frac{a_n}{\sqrt{R_n}+\sqrt{R_{n-1}}}$.

Indication — Procéder à une comparaison série-intégrale.

Correction — Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant b_k = \frac{a_k}{\sqrt{R_k}+\sqrt{R_{k-1}}} = \frac{R_{k-1}-R_k}{\sqrt{R_k}+\sqrt{R_{k-1}}} \leqslant \frac{R_{k-1}-R_k}{2\sqrt{R_k}}$$

Il vient alors $0 \leqslant b_k \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{R_k}^{R_{k-1}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$. En sommant,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant \frac{1}{2}\int_{R_n}^{R_0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{2}\int_{0}^{R_0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum b_n$ sont bornées donc $\sum b_n$ converge.

♣♣♣ **Exercice 10 —** Calculer $\displaystyle\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2q+pq^2+2pq}$.

Indication — On pourra poser $n = p+q$.

Correction — Étudions la sommabilité de la famille de réels positifs $(u_{p,q})$ définie par :

$$u_{p,q} = \frac{1}{p^2q+pq^2+2pq} = \frac{1}{pq(p+q+2)}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q\geqslant 1}^{+\infty} u_{p,q} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p(n-p)(n+2)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} \sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{n-p}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+2)} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+2)} \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} \sum_{n=p+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}\right) \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2p}-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2(p+2)}\right) = \frac{7}{4} < +\infty
\end{aligned}$$

par télescopage. Ceci justifie la sommabilité de la famille.