Suites et séries de fonctions

PRÉPARATION 8

♣ **Exercice 1 —** Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où f_n est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Indication — On utilisera l'inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Correction —

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto 1$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $g_n = f - f_n$.

$$\forall x \in [a,b], \quad |g_n(x)| = x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{nx}\right)\right| \leqslant \frac{|x|}{n}$$

Donc $\|g_n\|_\infty \leqslant \dfrac{\max(|a|,|b|)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
La convergence est uniforme.

♣ **Exercice 2 —** Étudier la convergence simple puis uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f_n(x) = n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx^2} \quad (\alpha > 0)$$

Indication — Pour justifier la convergence uniforme, on pourra ici calculer $\|f_n\|_\infty$.

Correction —

1. $n^\alpha \mathrm{e}^{-\beta n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour $\beta > 0$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle (on traitera séparément le cas $x = 0$).
2. Une étude de f_n' montre que $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)$.

$$\|f_n\|_\infty = \frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{\sqrt{2}} n^{\alpha-1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff \alpha < \frac{1}{2}$$

Il y a convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < \dfrac{1}{2}$.

♣♣ **Exercice 3 —** Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, de dérivée seconde bornée. Étudier la convergence simple puis uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

Indication — On pourra exploiter l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Correction —

1. f est dérivable donc $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + hf'(x) + \mathrm{o}(h)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) \underset{n\to+\infty}{=} f'(x) + \mathrm{o}(1)$$

La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ainsi simplement sur $\mathbb{R}$ vers f'.

2. f étant de classe $\mathscr{C}^2$ et f'' bornée, l'inégalité de Taylor-Lagrange nous permet d'écrire pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\left|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\|f''\|_\infty$$

L'inégalité devient ici, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) - \frac{f'(x)}{n}\right| \leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{2n^2}$$

Ainsi, $|\varphi_n(x) - f'(x)| \leqslant \dfrac{\|f''\|_\infty}{2n}$ et donc,

$$\|\varphi_n - f'\|_\infty \leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La convergence est bien uniforme.

♣ **Exercice 4 —** Étudier les convergences simple, uniforme et normale sur $\mathbb{R}$ des deux séries de fonctions de termes généraux :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}$$

Correction —

1. $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^2}$. $\sum f_n$ converge normalement (donc uniformément et simplement) sur $\mathbb{R}$.
2. $\|g_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$ donc $\sum g_n$ ne converge pas normalement. Le critère spécial des séries alternées assure la convergence simple et même uniforme de $\sum g_n$ sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k + x^2}\right| \leqslant \frac{1}{n+1+x^2} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

donc $\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
La convergence uniforme assure enfin la convergence simple de la série de fonctions.

♣♣ **Exercice 5 —** Après avoir justifié la convergence simple de la série de fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$, donner un équivalent en $+\infty$ de :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln(n)}{1+n^2x}$$

Correction — Soit $x>0$. Posons $f_n(x)=\dfrac{\sqrt{x}\ln(n)}{1+n^2x}$.

$$f_n(x)\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\text{ donc }\sum_{n\in\mathbb{N}^*}f_n(x)\text{ converge}$$

De plus, $f_n(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\ln(n)}{n^2\sqrt{x}}$. Montrons que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{x}f_n(x)$ admet une limite finie grâce au théorème de la double limite.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\forall x>0,\quad|\sqrt{x}f_n(x)|\leqslant\frac{\ln(n)}{n^2}$$

D'où la convergence normale de la série sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{x}f_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}f_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}>0$$

Enfin, $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}$.

♣♣ **Exercice 6 —** Soit $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}(nx)}$.

1. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathscr{D}_f$.
2. Donner un équivalent de $f(x)$ en 0 et $+\infty$.

Correction — $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ et $f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\dfrac{\pi}{2x}$.

♣♣ **Exercice 7 —** Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\int_0^1 t^nf(t)\,\mathrm{d}t=0\quad(*)$$

Montrer que f est nulle.

Indication — On appliquera le théorème de Weierstrass.

Correction — L'égalité $(*)$ permet d'obtenir :

$$\forall P\in\mathbb{R}[X],\quad\int_0^1 P(t)f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t&=\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1(f-P_n(t))f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1(f-P_n(t))f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ainsi, $\left|\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\|f-P_n\|_\infty\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

D'où $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t=0$.

Par continuité et positivité de f^2, $f^2=0$ donc $f=0$.

♣♣ **Exercice 8 —** On pose, pour tout $x>0$,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier sa monotonie.
3. Montrer que pour tout $x>0$,
$$xf(x)-f(x+1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$$
4. Donner un équivalent de $f(x)$ en 0 et en $+\infty$.

Correction — Posons $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$.

1. $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*}\leqslant\dfrac{1}{n!}$. La série $\sum f_n$ converge normalement donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On applique le théorème de dérivation terme à terme.
   - Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - $\|f_n'\|_\infty\leqslant\dfrac{1}{n!}$. $\sum f_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}_+^*$.

   f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall x>0,\quad f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}$$
   D'après le critère spécial des séries alternées, $f'(x)$ est du signe de $f_0(x)<0$. f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. $$\begin{aligned}\forall x>0,\quad xf(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x+n-n)}{n!(x+n)}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+1+n)}\end{aligned}$$
   Ainsi, $xf(x)-f(x+1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
4. Par continuité de f en 1,
$$xf(x)=\frac{1}{\mathrm{e}}+f(x+1)\xrightarrow[x\to0]{}f(1)+\frac{1}{\mathrm{e}}=1$$
   $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{1}{x}$. On montre de même que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\mathrm{e}x}$.