Séries entières

PRÉPARATION 9

♣♣ **Exercice 1 —** Déterminer le rayon de convergence des séries entières de terme général :

$$a_n = \frac{(3n)!}{n!^3}\ ; \quad b_n = \frac{\mathrm{ch}(n)}{n}\ ;$$

$$c_n = n^{(-1)^n}\ ; \quad d_n = n^{\text{ième}}\text{décimale de } \pi\ ;$$

Correction —

1. Règle de d'Alembert, $R = 1/27$;
2. $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^n}{2n}$, même rayon de convergence que $\sum(\mathrm{e}x)^n$ $R = \mathrm{e}^{-1}$;
3. La série diverge grossièrement pour $x = 1$ donc $R \leqslant 1$. Par découpage de la somme (termes pairs et impairs), $R = 1$.
4. (d_n) ne converge pas vers 0 (π est irrationnel) donc la série diverge grossièrement pour $x = 1$. $R \leqslant 1$. De plus, $|d_n x^n| \leqslant 10|x|^n$. $R \geqslant 1$ donc $R = 1$.

♣ **Exercice 2 —** Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes :

1. $g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{3-x^2}\right)$;
2. $h(x) = \cos(x)\cdot\mathrm{ch}(x)$;
3. $q(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$;

Correction —

1. $g(x) = \ln(2-x) - \ln(3-x^2)$, $R = \sqrt{3}$,
$g(x) = \ln\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ avec :
$$a_{2p} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^{2p+1}}\right)\ ; \quad a_{2p+1} = \frac{-1}{(2p+1)2^{2p+1}}$$
2. $R = +\infty$,
$$h(x) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{(1+i)x} + \mathrm{e}^{(-1+i)x} + \mathrm{e}^{(1-i)x} + \mathrm{e}^{-(1+i)x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(4n)!}x^n.$$
3. $R = +\infty$, $q'(x) = \cos(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}$.
$$q(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}.$$

♣♣ **Exercice 3 —** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes ainsi que leur somme.

1. $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{(n+1)(2n+1)}$;
2. $\sum_{n\geqslant 0}\cos(n\theta)x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0}\sin(n\theta)x^n$.

Indication — Pour 1., on commencera par effectuer une décomposition en éléments simples.

Correction —

1. $R = 1$ et $\frac{1}{(n+1)(2n+1)} = \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$.
Si $x \in]-1, 0[$,
$$S(x) = \frac{2}{\sqrt{-x}}\arctan\sqrt{-x} + \frac{1}{x}\ln(1-x)$$
Si $x \in]0, 1[$,
$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\left[\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right] + \frac{1}{x}\ln(1-x)$$
2. $R_{\cos} = 1, R_{\sin} = +\infty$ si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, 1 sinon.
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n + i\sum_{n=0}^{+\infty}\sin(n\theta)x^n = \frac{(1-x\cos\theta) + ix\sin\theta}{(1-x\cos\theta)^2 + (x\sin\theta)^2}$$

♣♣ **Exercice 4 —**

1. Montrer que $f : x \mapsto \frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ est développable en série entière pour $\theta \in]0, \pi[$.
2. Faire de même avec $g : x \mapsto \frac{4x+1}{4x^3-3x+1}$.

Indication — On remarquera que :

$$1 - 2x\cos\theta + x^2 = (x - \mathrm{e}^{i\theta})(x - \mathrm{e}^{-i\theta}),$$
$$4x^3 - 3x + 1 = (2x-1)^2(x+1).$$

Correction — Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-\mathrm{e}^{i\theta}} - \frac{1}{x-\mathrm{e}^{-i\theta}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sin[(n+1)\theta]\,x^n$$

$$g(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{1+x} + \frac{6}{(1-2x)^2} - \frac{2}{1-2x}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^{n+1} + (3n+2)2^{n+1}\right]x^n$$

♣ **Exercice 5 —** Déterminer le développement en série entière en 0 de :

1. $f : x \mapsto \operatorname{sh}(\arcsin x)$;
2. $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Indication — Déterminer une équation différentielle vérifiée par f ; dériver g.

Correction —

1. $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) - f(x) = 0$.

$$f(x) = x + \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\prod_{k=1}^{p}((2k-1)^2+1)\right)$$

2. $g(x) = g(0) + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)(2n)!}$.

♣♣♣ **Exercice 6 —**

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $R_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n = \frac{R_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

Préciser la valeur de $R_k(1)$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} P(n) + \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}[X]$$

Trouver le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.

3. On pose alors $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Montrer que S admet en R une limite infinie et en $-R$ une limite finie.

Indication — 2. Trouver un équivalent de u_n.
3. Sommer le développement asymptotique pour étudier la limite en -1^+. Pour la limite en 1^-, on minorera $|u_n|$ par $|a_p|n^p/2$, à partir d'un certain rang.

Correction —

1. Par récurrence sur k. On trouve :

$$R_{k+1}(x) = x\left((1-x)R_k'(x) + (k+1)R_k(x)\right)$$

$R_{k+1}(1) = (k+1)R_k(1)$ donc $R_k(1) = k!$.

2. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ où $a_p \neq 0$. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} P(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p n^p$.
Le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$ est donc celui de $\sum n^p x^n$, mais aussi celui de $\sum x^n$. Ainsi, $R = 1$.

3. $S(x) = u_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(n)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha}{n}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\beta_n}{n^2}x^n$ où (β_n) est supposée bornée et $x \in]-1,1[$. Ainsi,

$$S(x) = u_0 + \sum_{k=1}^{p}\frac{a_k R_k(x)}{(1-x)^{k+1}} - \alpha\ln(1-x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\beta_n}{n^2}x^n$$

Ces dernières quantités admettent toutes une limite finie lorsque $x \to -1^+$, en particulier la dernière en application le théorème radial d'Abel.
La situation est moins claire lorsque $x \to 1^-$. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p n^p$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|u_n| \geqslant \frac{|a_p|}{2}n^p$$

Ainsi, quitte à supposer sans perte de généralité $a_p \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{n_0} u_n x^n + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} u_n x^n \\ &\geqslant \sum_{n=0}^{n_0} u_n x^n + \frac{a_p}{2}\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} n^p x^n \\ &\geqslant \sum_{n=0}^{n_0}\left(u_n - \frac{a_p n^p}{2}\right)x^n + \frac{a_p}{2}\cdot\frac{R_p(x)}{(1-x)^{p+1}} \end{aligned}$$

Un passage à la limite donne alors $S(x) \xrightarrow[x\to1^-]{} +\infty$.