MP **Programme de khôlle n°1** Semaine du 13 septembre

Chap. 1 | Révisions et compléments d'algèbre linéaire

1. **Espaces vectoriels**
   - Familles quelconques de vecteurs (finies ou infinies).
     Familles libres, familles génératrices, bases.
   - Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite.
   - Somme de p sous-espaces vectoriels, somme directe. Caractérisation.
     Cas particulier de la somme de deux sous-espaces vectoriels : somme directe, espaces supplémentaires et caractérisation. Base adaptée.
   - Hyperplans en dimension finie (définis comme des sous-espaces admettant une droite comme supplémentaire). Caractérisation à l'aide du noyau d'une forme linéaire non nulle. L'intersection de p hyperplans est de dimension au moins $n-p$.
2. **Applications linéaires**
   - Définition, noyau et image. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.
   - Théorème du rang. En dimension finie, f injectif ssi f surjectif ssi f bijectif.
     L'image d'une base (de toute base) par un isomorphisme est une base.
   - Représentation matricielle des vecteurs et des applications linéaires. Matrices de passages et changement de bases.
   - Sous-espaces stables, endomorphismes induits.
3. **Matrices**
   - Produit, calcul de puissances (formule du binôme et, sur des exemples uniquement, diagonalisation, polynôme annulateur), inversion.
   - Matrices semblables. Deux matrices semblables ont même rang, même trace et même déterminant.
4. **Endomorphismes remarquables**
   - Projecteurs : définition, caractérisation ($p \circ p = p$ où $p \in \mathscr{L}(E)$).
   - Symétries : définition, caractérisation ($s \circ s = \mathrm{id}_E$ où $s \in \mathscr{L}(E)$).

Questions de cours :

- Les sous-espaces $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Trace d'un endomorphisme.
- Si s est une symétrie vectorielle de E, $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
- L'intersection de p hyperplans de E avec $\dim(E) = n$ est un espace vectoriel de dimension au moins $n-p$.