MP **Programme de khôlle n°10** Semaine du 1er décembre

Chap. 9 | Séries entières

1. Définition d'une série entière. Domaine de convergence. Lemme d'Abel.
   Rayon de convergence défini comme $R = \sup\{r \geqslant 0 \ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{bornée}\}$.
   Disque ouvert et intervalle ouvert de convergence.
2. Convergence absolue sur le disque ouvert de convergence, divergence grossière en dehors du disque fermé. Exemples de comportement au bord du disque.
3. Détermination pratique du rayon de convergence avec notamment :
   – la règle de d'Alembert (dans sa version « séries entières » ou directement appliquée aux séries numériques à termes strictement positifs) ;
   – par comparaison (majoration, équivalent, o, O) ;
   – par encadrement $\left(\text{si } \sum a_n x_0^n \text{ converge alors } R \geqslant |x_0|, \text{etc.}\right)$
   – $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.
4. Opération sur les séries entières : rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.
5. Converge normale d'une série entière sur $D(0,r)$ pour tout $r < R$; continuité de la somme sur le domaine ouvert de convergence.
   Théorème de convergence radiale d'Abel dans le cas réel ; continuité de la somme sur le domaine de convergence dans le cas réel.
   La fonction somme d'une série entière réelle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence. Dérivation et intégration terme à terme.
6. Développement en séries entières usuels :
   $$\mathrm{e}^x,\ \cos(x),\ \sin(x),\ \mathrm{ch}(x),\ \mathrm{sh}(x),\ \frac{1}{1-x},\ \ln(1+x),\ \arctan(x)\ \text{ et }\ (1+x)^\alpha$$
7. Techniques classiques de développements en série entière (combinaisons linéaires de développements en série entière usuels et produit de Cauchy, dérivation et intégration terme à terme, inégalité de Taylor-Lagrange, décomposition en éléments simples et utilisation d'une équation différentielle).

Questions de cours :

- rayon de convergence de la somme de deux séries entières ;
- $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence ;
- pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} x^p$;
- si f est dév. en série entière sur $]-r,r[$, f est la somme de sa série de Taylor.