

Chap. 9 | Séries entières

- Définition d'une série entière. Domaine de convergence. Lemme d'Abel.
Rayon de convergence défini comme $R = \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée}\}$.
Disque ouvert et intervalle ouvert de convergence.
- Convergence absolue sur le disque ouvert de convergence, divergence grossière en dehors du disque fermé. Exemples de comportement au bord du disque.
- Détermination pratique du rayon de convergence avec notamment :
 - la règle de d'Alembert (dans sa version « séries entières » ou directement appliquée aux séries numériques à termes strictement positifs) ;
 - par comparaison (majoration, équivalent, o, O) ;
 - par encadrement (si $\sum a_n x_0^n$ converge alors $R \geq |x_0|$, etc.)
 - $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.
- Opération sur les séries entières : rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.
- Converge normale d'une série entière sur $D(0, r)$ pour tout $r < R$; continuité de la somme sur le domaine ouvert de convergence.
Théorème de convergence radiale d'Abel dans le cas réel ; continuité de la somme sur le domaine de convergence dans le cas réel.
La fonction somme d'une série entière réelle est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence. Dérivation et intégration terme à terme.
- Développement en séries entières usuels :

$$e^x, \cos(x), \sin(x), \operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x), \frac{1}{1-x}, \ln(1+x), \arctan(x) \text{ et } (1+x)^\alpha$$

- Techniques classiques de développements en série entière (combinaisons linéaires de développements en série entière usuels et produit de Cauchy, dérivation et intégration terme à terme, inégalité de Taylor-Lagrange, décomposition en éléments simples et utilisation d'une équation différentielle).

Chap. 10 | Fondements des probabilités

- Révisions des techniques combinatoires vues en 1^{ère} année : p -listes ou p -uplets, permutations, arrangements et combinaisons de p éléments d'un ensemble fini. Indicatrices.

2. Espaces probabilisés

- Tribu, probabilité. Système (quasi-)complet d'événements.
- Distribution de probabilités discrètes. Cas fini : probabilité uniforme.
- Continuité croissante/décroissante et application aux calculs de limites de la probabilité d'une réunion/intersection d'événements. Sous-additivités finie et dénombrable. Événements négligeables, événements presque sûrs.
- Conditionnement et indépendance : probabilité conditionnelle, formules des probabilités composées, des probabilités totales et formule de Bayes. Indépendance 2 à 2 et indépendance mutuelle d'une famille d'événements.

Aucun exercice de probabilités ne pourra porter cette semaine sur les variables aléatoires, y compris ceux en lien avec les lois usuelles étudiées en 1^{ère} année.

Questions de cours :

- développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;
- théorème de convergence radiale d'Abel ;
- si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, pour tous $r \in]0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ où $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$.
- Soient $(u_n), (v_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, le rayon de convergence $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ vaut 1 et $\sum v_n$ diverge. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$.