MP **Programme de khôlle n°12** Semaine du 13 décembre

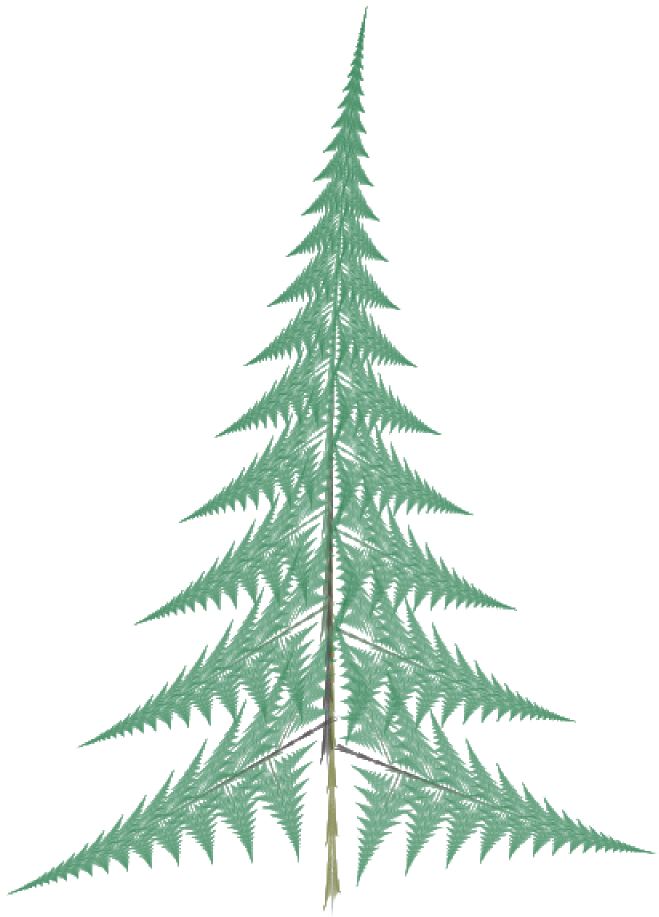
Chap. 11 | Réduction (2)

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec E un espace vectoriel de dimension finie.

- Polynômes d'endomorphismes. Algèbres commutatives $\mathbb{K}[u]$ et $\mathbb{K}[M]$.
- Polynômes annulateurs, polynôme minimal.
  - $\mathbb{K}[u] = \underset{0\leqslant k\leqslant d-1}{\mathrm{Vect}}(u^k)$ où $d = \deg(\pi_u)$ et $\dim(\mathbb{K}[u]) = d$.
  - Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.
  - Si F (de dimension non nulle) est stable par u, $\pi_{u_{|F}} | \pi_u$.
  - Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.
  - Théorème de Cayley-Hamilton. Les racines du polynôme minimal d'un endomorphisme sont exactement ses valeurs propres ; $\deg(\pi_u) \leqslant \dim(E)$.
- Lemme de décomposition des noyaux.
- Réduction
  - Un endomorphisme est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples ssi son polynôme minimal est scindé à racines simples.
  - Si u est diagonalisable et F stable par u, l'endomorphisme induit $u_{|F}$ est diagonalisable.
  - S'il existe un polynôme scindé annulant M, alors M est semblable à une matrice diagonale par blocs triangulaires supérieurs.

Questions de cours :

- $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont stables par $Q(u)$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.
- Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.
- $\mathbb{K}[u] = \underset{0\leqslant k\leqslant d-1}{\mathrm{Vect}}(u^k)$ où $d = \deg(\pi_u)$ (seulement le caractère générateur).
- Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est X^n.



Bonnes fêtes de fin d'année !