MP **Programme de khôlle n°14** Semaine du 19 janvier

Chap. 12 | Topologie d'un espace vectoriel normé

1. Notions générales de topologie
   - Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection ou par produit finis. Une boule ouverte est un ouvert. Voisinage d'un point.
   - Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion ou produit finis. Une boule fermée, une sphère, sont fermées.
   - Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense.
   - Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.
2. Limite et continuité
   - Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle. Extensions (limite infinie ou en $\pm\infty$). Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.
   - Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.
     Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues. Applications uniformément continues, applications lipschitziennes. Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.
   - Continuité d'une application (multi)linéaire. Caractérisation de la continuité. Norme d'opérateur (ou subordonnée), sous-multiplicativité.
3. Compacité
   - Définition (par les valeurs d'adhérence). Une partie compacte est fermée et bornée. Une partie fermée d'une partie compacte est compacte. Produit d'une famille finie de compacts.
     La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.
   - Image d'une partie compacte par une application continue. Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes. Théorème de Heine.
4. Espaces vectoriels normés de dimension finie
   - Équivalence des normes en dimension finie.
   - En dimension finie, les parties compactes sont les fermés bornés.
   - En dimension finie, toutes les applications linéaires, polynomiales et multilinéaires sont continues.
   - Tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.
5. Connexité par arcs
   - Partie connexe par arcs, composantes connexes d'une partie. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
   - Image d'une partie connexe par arcs par une application continue. Théorème des valeurs intermédiaires.

Questions de cours :

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.
- Si $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$, existence de $|||u||| = \sup\limits_{x\neq 0_E} \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup\limits_{\|x\|_E=1} \|u(x)\|_F$; $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $d(x,F) = \|x-y\|$.