MP **Programme de khôlle n°16** Semaine du 6 février

Chap. 14 | Espaces préhilbertiens réels

1. Produit scalaire. Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens.
   Exemples classiques :
   - $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique ;
   - $\mathbb{R}[X]$ muni de $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$;
   - $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$;
   - $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(B^\top A)$.
2. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Norme euclidienne. Propriétés, dont l'identité du parallélogramme et l'identité de polarisation ; inégalité triangulaire.
4. Vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore. Familles orthogonales et orthonormales. Toute famille orthonormale est libre.
   Existence d'une base orthonormale dans un espace euclidien, algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
   Décomposition dans une base orthonormale.
5. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Si F est un s.e.v. de dimension finie de E (espace préhilbertien réel), alors $E = F \oplus F^\perp$.
6. Projection orthogonale et distance à un s.e.v. de dimension finie. Caractérisation d'un projecteur orthogonal ; expression dans une base orthonormale. Inégalité de Bessel. $d(x,F) = \inf_{u\in F} \|x-u\| = \|x-p(x)\|$ où p est la projection orthogonale sur F.

Questions de cours :

- $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(B^\top A)$ est un espace euclidien.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.
- Toute famille orthonormale est libre *et* $d(x,F) = \inf_{u\in F} \|x-u\| = \|x-p(x)\|$ où p est la projection orthogonale sur F.
- Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- Si E est un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de *dimension finie*, alors $E = F \oplus F^\perp$.