MP **Programme de khôlle n°17** Semaine du 13 février

Chap. 15 | Géométrie euclidienne

1. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation des formes linéaires dans un espace euclidien. Propriétés élémentaires de l'adjoint : linéarité de $u \mapsto u^*$, involutivité, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$. Représentation matricielle dans une base orthonormale. Si F est u-stable, $F^\perp$ est u^*-stable.
2. Isométries vectorielles
   - Matrice orthogonale : définition, caractérisation par les lignes ou les colonnes. Interprétation comme une matrice de passage entre deux bases orthonormées. Groupes orthogonal / spécial orthogonal – notés respectivement $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$.
   - Isométrie vectorielle. Équivalence entre conservation de la norme et du produit scalaire. Une isométrie vectorielle est un automorphisme. Caractérisation d'une isométrie par l'image d'une base orthonormale, par sa matrice dans une base orthonormale.
     Groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$. Isométrie directe/indirecte (positive/négative).
   - Orientation d'un espace euclidien. Base orthonormée directe/indirecte. Produit mixte, produit vectoriel. Propriétés élémentaires.
   - Symétrie orthogonale, réflexion. Définition, propriétés.
   - Classification des isométries vectorielles du plan et de l'espace ; réduction des isométries en dimension n.
3. Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques)
   - Endomorphismes autoadjoints. Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique. Caractérisation matricielle d'un endomorphisme symétrique (dans une base orthonormale).
   - Réduction d'un endomorphisme autoadjoint.
     Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint (ou d'une matrice symétrique réelle) sont orthogonaux. Théorème spectral : si u est un endomorphisme symétrique, il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u ; toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale.
   - Endomorphismes autoadjoint positifs et définis positifs. Définitions, caractérisations spectrale et matricielle. Notations $\mathscr{S}(E)$, $\mathscr{S}^+(E)$ et $\mathscr{S}^{++}(E)$.

Questions de cours :

- Pour un endomorphisme, équivalence entre conservation de la norme et du produit scalaire.
- Classification des isométries planes et des isométries de l'espace (tableaux complets avec éléments propres).
- Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors :
  $$A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \iff \exists M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A = M^\top M$$
- Si $u \in \mathscr{S}^{++}(E)$, il existe un unique $v \in \mathscr{S}^{++}(E)$ tel que $u = v^2$.
- Si $u \in \mathscr{S}(E)$, alors pour tout $x \in E$, $\lambda_{\min} \cdot \|x\|^2 \leqslant \langle u(x)|x\rangle \leqslant \lambda_{\max} \cdot \|x\|^2$. On précisera les cas d'égalité.