MP **Programme de khôlle n°2** Semaine du 20 septembre

Chap. 2 | Déterminant

1. Déterminant d'une matrice. Propriétés :
   - Toute matrice qui comporte deux vecteurs colonnes identiques, ou, plus généralement, une famille de vecteurs colonnes liée a un déterminant nul.
   - Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et $\det\left(A^\top\right) = \det(A)$. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

   Matrices semblables et déterminant.
   Développement par rapport à une ligne ou une colonne.
   Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
2. Comatrice. Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $M \cdot \mathrm{Com}(M)^\top = \mathrm{Com}(M)^\top \cdot M = \det(M) I_n$.
3. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$.
4. Déterminant d'un endomorphisme : par définition le déterminant d'une matrice représentative dans une base quelconque.
   Déterminant et isomorphisme. $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$.
5. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Chap. 3 | Réduction

1. **Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres**
   - La somme de p sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.
   - Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
2. **Polynôme caractéristique**
   - Polynôme caractéristique défini par $\chi_f = \det(X \mathrm{id}_E - f)$.
   - Les valeurs propres d'un endomorphisme f sont (exactement) les racines du polynôme caractéristique.
   - Relation $\chi_f = X^n - \mathrm{Tr}(f) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(f)$ où $n = \dim(E)$.
   - Multiplicité d'une valeur propre λ notée $m(\lambda)$.
   - Nombre de valeurs propres lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   - Si F est stable par f, $\chi_{f_{|F}}$ divise χ_f.
   - Encadrement $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m(\lambda)$.
3. **Endomorphismes et matrices diagonalisables**
   - Un endomorphisme de E (de dimension finie) est dit diagonalisable s'il existe une base de E pour laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
   - f est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres de f est égale à E.
   - f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $\dim(E_\lambda) = m(\lambda)$.
   - Si χ_f admet $\dim(E)$ racines simples alors f est diagonalisable.

Questions de cours :

- Déterminant de Vandermonde (méthode choisie par l'étudiant(e)).
- Les valeurs propres d'un endomorphisme f sont (exactement) les racines du polynôme caractéristique.
- Si F est stable par f, $\chi_{f_{|F}}$ divise χ_f ; encadrement $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m(\lambda)$.