

## Chap. 19 | Calcul différentiel

### 1. Fonctions numériques de deux variables.

- Dérivées partielles premières. Fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Formule de Taylor-Young à l'ordre 1. Gradient. Équation d'un plan tangent. Différentielle en un point. Dérivées partielles et composées de fonctions.
- Dérivées partielles d'ordre 2. Théorème de Schwarz. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
- Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles.

### 2. Applications différentiables

*Les fonctions sont définies sur un ouvert  $\mathcal{U}$  d'un espace vectoriel normé  $E$  de dimension finie, à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$  de dimension finie.*

- Différentielle en un point, différentielle sur  $\mathcal{U}$ . Continuité d'une application différentiable. Opérations algébriques sur les fonctions différentiables (somme, composée, produit de deux fonctions numériques). Applications de classe  $\mathcal{C}^1$ .
- Dérivée selon un vecteur, dérivée partielle. Caractérisation des applications de classe  $\mathcal{C}^1$ . Jacobienne.
- Gradient d'une fonction numérique.
- Dérivation et intégration le long d'un arc. Caractérisation des fonctions constantes sur un connexe par arcs. Vecteur tangent.
- Applications de classe  $\mathcal{C}^k$ . Théorème de Schwarz.

### 3. Optimisation

- Matrice hessienne. Formule de Taylor-young à l'ordre 2 pour une fonction numérique de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .
- Étude au premier ordre : point critique, condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.
- Étude au second ordre : lien entre l'existence d'un extremum et la hessienne. Utilisation de la trace et du déterminant pour  $n = 2$ .
- Optimisation sous une contrainte : si  $f, g : \mathcal{U} \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , si  $X$  est l'ensemble des zéros de  $g$  et  $dg_x \neq 0$  pour un certain  $x \in X$ , alors  $df_x$  et  $d_g$  sont colinéaires. Interprétation à l'aide du gradient lorsque  $E$  est euclidien. Application à la recherche d'extrema sous (une) contrainte.

## Questions de cours :

- Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admise), versions vectorielle et matricielle.
- Extrema de  $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - (x - y)^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- TD – Existence d'un vecteur propre unitaire pour  $u \in \mathcal{S}(E)$  par les extrema liés.
- Multiplicateur de Lagrange.