MP **Programme de khôlle n°21** Semaine du 25 mars

Chap. 19 | Structures algébriques usuelles

1. Groupes
   - Groupes, sous-groupes. Produit fini de groupes, intersection de sous-groupes. Sous-groupes de $\mathbb{Z}$.
   - Morphisme de groupes. Images directe et réciproque d'un sous-groupe. Image et noyau d'un morphisme. Isomorphisme, automorphisme.
   - Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.
   - Sous-groupes engendrés. Groupes monogènes, groupes cycliques. Tout groupe monogène est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (cas infini) ou à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (cas fini).
   - Ordre d'un élément. L'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.
2. Anneaux et corps
   - Anneaux, sous-anneaux, corps, sous-corps. Produit d'anneaux.
   - Morphismes d'anneaux. Noyau et image.
   - Idéal d'un anneau commutatif. Idéal principal. Intersection, somme d'idéaux. Idéaux de $\mathbb{Z}$. Pgcd et ppcm. Théorème de Bézout, lemme de Gauss.
   - Anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$. Élements inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier. Lemme chinois. Indicatrice d'Euler. Théorème d'Euler et petit théorème de Fermat.
   - Anneau de polynômes $\mathbb{K}[X]$. Division euclidienne. Idéaux de $\mathbb{K}[X]$. Pgcd et ppcm. Théorème de Bézout, lemme de Gauss. Décomposition en facteurs irréductibles. Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{C}[X]$.
3. $\mathbb{K}$-algèbres : algèbres, sous-algèbres et morphismes d'algèbres.

Questions de cours :

- Sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ et idéaux de $(\mathbb{Z},+,\times)$.
- Tout groupe monogène est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique (x3).
- Les idéaux de $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ sont principaux.
- En notant φ l'indicatrice d'Euler, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = n \cdot \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.