

Chap. 21 | Structures algébriques usuelles

1. Groupes

- Groupes, sous-groupes. Produit fini de groupes, intersection de sous-groupes. Sous-groupes de \mathbb{Z} .
- Morphisme de groupes. Images directe et réciproque d'un sous-groupe. Image et noyau d'un morphisme. Isomorphisme, automorphisme.
- Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
- Sous-groupes engendrés. Groupes monogènes, groupes cycliques. Tout groupe monogène est isomorphe à \mathbb{Z} (cas infini) ou à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (cas fini).
- Ordre d'un élément. L'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.

2. Anneaux

- Anneaux, sous-anneaux, corps, sous-corps. Produit d'anneaux.
- Morphismes d'anneaux. Noyau et image.
- Idéal d'un anneau commutatif. Idéal principal. Intersection et somme d'idéaux. Idéaux de \mathbb{Z} . Pgcd et ppcm de deux entiers. Théorème de Bézout, lemme de Gauss.
- Anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$. Éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier. Lemme chinois. Indicatrice d'Euler. Théorème d'Euler et petit théorème de Fermat.
- Anneau de polynômes $\mathbb{K}[X]$. Division euclidienne. Idéaux de $\mathbb{K}[X]$. Pgcd et ppcm de deux entiers. Théorème de Bézout, lemme de Gauss. Décomposition en facteurs irréductibles. Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{C}[X]$.

3. \mathbb{K} -algèbres : algèbres, sous-algèbres et morphismes d'algèbres.**Questions de cours :**

- Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.
- Théorème de Bézout (dans \mathbb{Z}).
- Éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- En notant φ l'indicatrice d'Euler, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = n \cdot \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.