

Chap. 3 | Réduction**1. Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres**

- La somme de p sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.
- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

2. Polynôme caractéristique

- Polynôme caractéristique défini par $\chi_f = \det(X\text{id}_E - f)$.
- Les valeurs propres d'un endomorphisme f sont (exactement) les racines du polynôme caractéristique.
- Relation $\chi_f = X^n - \text{Tr}(f)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(f)$ où $n = \dim(E)$.
- Multiplicité d'une valeur propre λ notée $m(\lambda)$.
- Nombre de valeurs propres lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- Si F est stable par f , $\chi_{f|_F}$ divise χ_f .
- Encadrement $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m(\lambda)$.

3. Endomorphismes et matrices diagonalisables

- Un endomorphisme de E (de dimension finie) est dit diagonalisable s'il existe une base de E pour laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
- f est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres de f est égale à E .
- f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$, $\dim(E_\lambda) = m(\lambda)$.
- Si χ_f admet $\dim(E)$ racines simples alors f est diagonalisable.

4. Endomorphismes et matrices trigonalisables

Définition, caractérisation, exemples en petites dimensions.

5. Applications de la réduction (calculs de puissances, suites récurrentes...)**6. Endomorphismes nilpotents**

- L'indice de nilpotence est inférieur ou égal à la dimension de l'espace.
- Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable et 0 est sa seule valeur propre.

Questions de cours :

- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (*énoncé seulement*).
- L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E .
- Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon (*traité lundi 27 sept.*).

- Trigonalisation de la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (*feuille d'entraînement*).