

**Chap. 5 | Procédés sommatoires discrets**

1. → 4. Séries numériques : intégralité du programme précédent.

5. Familles sommables :

- Ensemble dénombrable, au plus dénombrable. Exemples :  $\mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}^2$  et  $\mathbb{Q}$ . Produit cartésien fini et réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. Les ensembles  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ,  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  et  $\mathbb{R}$  ne sont pas dénombrables.
- Famille sommable de réels positifs et de nombres complexes. Linéarité de la somme. Sommation par paquets. *Dans le cas positif, l'obtention d'une somme finie vaut sommabilité.* Convergence commutative.
- Application des familles sommables : séries doubles ; produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

**Chap. 6 | Norme sur un espace vectoriel**

Les exercices sur ce chapitre porteront cette semaine sur des comparaisons de normes.

1. Norme sur un espace vectoriel. Inégalité triangulaire étendue. Norme euclidienne. Normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathbb{K}^n$  et sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ . Norme produit.
2. Distance associée à une norme. Boules ouverte et fermée, sphère. Partie bornée.
3. Suite d'éléments d'un espace vectoriel normé. Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Suites extraites, valeurs d'adhérence, théorème de Bolzano-Weierstrass.
4. Comparaison des normes. Normes équivalentes, invariance de la convergence d'une suite. Équivalence des normes sur un espace de dimension finie (admis).
5. Série à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Convergence absolue. Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente. Exponentielle de matrices et d'endomorphismes (en dimension finie).

L'exponentielle de matrices a seulement été définie ; ses propriétés seront étudiées dans le chapitre « Équations différentielles ».

**Questions de cours :**

- Nature des séries de Bertrand (*nature de  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^\beta(t)}$  pour  $\beta > 0$  admise*).
- Pour tous  $z, z' \in \mathbb{C}$ ,  $\exp(z) \times \exp(z') = \exp(z + z')$ .
- Soient deux normes  $N$  et  $N'$  définies sur  $E$ . Toute suite convergeant au sens de  $N$  converge au sens de  $N'$  si et seulement s'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $N' \leq \alpha N$ .
- L'application définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  par  $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$  où  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  définit une norme ; de plus, pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .