MP **Programme de khôlle n°7** Semaine du 9 novembre

Chap. 7 | Réduction (2)

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, où E est un espace vectoriel de dimension finie.

1. Polynômes d'endomorphismes. Algèbres commutatives $\mathbb{K}[u]$ et $\mathbb{K}[M]$.
2. Polynômes annulateurs, polynôme minimal.
   - $\mathbb{K}[u] = \underset{0 \leqslant k \leqslant d-1}{\text{Vect}}(u^k)$ où $d = \deg(\pi_u)$ et $\dim(\mathbb{K}[u]) = d$.
   - Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.
   - Si F (de dimension non nulle) est stable par u, $\pi_{u_{|F}} | \pi_u$.
   - Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.
   - Théorème de Cayley-Hamilton. Les racines du polynôme minimal d'un endomorphisme sont exactement ses valeurs propres ; $\deg(\pi_u) \leqslant \dim(E)$.
3. Réduction
   - Lemme de décomposition des noyaux.
   - Un endomorphisme est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur simplement scindé, ssi son polynôme minimal est simplement scindé.
   - Si u est diagonalisable et F stable par u, l'endomorphisme induit $u_{|F}$ est diagonalisable.
   - Un endomorphisme est trigonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé, ssi son polynôme minimal est scindé.

Questions de cours :

- Si E est de dimension finie, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, *ainsi que la propriété*, Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.
- La famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$, en notant d le degré de π_u.
- $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u.
- Théorème de Cayley-Hamilton. *On admettra le calcul du déterminant de la matrice compagnon.*