MP **Programme de khôlle n°9** Semaine du 22 novembre

Chap. 8 | Suites et séries de fonctions

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pas d'extension dans l'immédiat des théorèmes aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Suite de fonctions.
   - Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
   - Continuité de la limite uniforme et théorème de la double limite.
   - Intégration d'une limite uniforme sur un segment ; théorème de convergence dominée.
   - Dérivation d'une limite uniforme (extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$).
2. Série de fonctions.
   - Convergence simple, convergence uniforme et convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.
   - Adaptation des résultats précédents au cas des séries. Dérivation et intégration terme à terme d'une série de fonctions.
3. Approximation uniforme
   - Toute fonction continue par morceaux sur un segment est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.
   - Toute fonction continue sur un segment est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Questions de cours :

- Si une série de fonctions converge normalement sur un intervalle I alors elle converge uniformément sur I.
- Dérivation terme à terme d'une série de fonctions dans sa version « classe $\mathscr{C}^k$ » (énoncé seulement).
- Théorèmes de convergence dominée et d'intégration termes à termes (énoncés seulement).
- Exercice `CCINP 49` (énoncé à rappeler aux étudiants).