MP **Programme de khôlle n°9** Semaine du 24 novembre

Chap. 8 | Suites et séries de fonctions

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. *Pas d'extension dans l'immédiat des théorèmes aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.*

1. Suites de fonctions
   - Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions.
     La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
   - Continuité de la limite uniforme et théorème de la double limite (en un point adhérent à l'intervalle I ou en $\pm\infty$).
   - Intégration d'une limite uniforme sur un segment et primitivation.
   - Dérivation d'une limite d'une suite de fonctions (extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$).
2. Séries de fonctions
   - Convergence simple, convergence uniforme et convergence normale d'une série de fonctions.
     La convergence normale implique la convergence uniforme (et la convergence absolue en tout point).
   - Adaptation des résultats précédents au cas des séries. Continuité et double limite, dérivation et intégration terme à terme de la somme.
   - Exemples d'étude asymptotique (double limite, comparaison $\sum/\int$, etc.)

Les théorèmes d'approximation uniforme, dont le théorème de Weierstrass, ne figurent pas au programme de cette semaine.

Questions de cours :

- Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues.
- Toute série de fonctions convergeant normalement sur un intervalle converge uniformément sur cet intervalle. Contre-exemple pour la réciproque.
- La fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.
- $\displaystyle\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.